

令和 5 年 6 月 8 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2022

課題番号：16K05178

研究課題名(和文) 複素力学系と付随する C^* -環の研究研究課題名(英文) Complex dynamical systems and related C^* -algebras

研究代表者

梶原 毅 (Kajiwara, Tsuyoshi)

岡山大学・環境生命科学研究所・特命教授

研究者番号：50169447

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：研究成果は、下記の通りである。自己相似写像に付随する C^* -環のコアを通して自己相似写像の次元群を定義し、分岐点がない場合の一般化になっていることを示した。また、テント写像の場合、付随する C^* -環のコアの K -群が整数群 Z であり、また、標準的準同型は、重複度1のシフトと同型になることを示した。また、これを示すための道具として、自己相似写像に付随する C^* -環のコアの行列表現の理論を整備し、離散モデルトレースとコアの K_0 群のペアリングの計算の手段を開発した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

分岐点を持つ力学系から C^* -環を構成する研究について、分岐点を付随する C^* -環の定義に積極的に取り込んだ研究は他にあまり例がなく、力学系と作用素環の世界に及ぼす影響は非常に大きい。特に、分岐点をもつ自己相似写像から生成される C^* -環の代数不変量からもとの分岐点の情報を取り出す試みは、これまでほとんど行われていないので、作用素環と力学系の研究をつなぐ分野において、学術的な意義は大きい。

研究成果の概要(英文)：The results of this research projects are as follows. I defined dimension group of a self-similar map through the C^* -algebra associated with the original self-similar map, and showed that this is a generalization of the case without branched points. As an example, I showed that the K_0 group of the core of the C^* -algebra associated with the tent map is the ring of integer, and the canonical endomorphism is isomorphic to the shift of multiplicity 1, using the pairing of discrete model traces and elements of K_0 group of the core.

研究分野：基礎解析学

キーワード：自己相似写像 作用素環 K -群 コア トレース イdealル

1. 研究開始当初の背景

(1) 作用素環の研究において、可逆な力学系の C^* -接合積は最も基本的な概念であり、古くから研究されてきた。一方、近年において、局所的に多対一であるような、非可逆な力学系から作られる C^* -環の研究も行われるようになった。ただし、これまで国内、国外で用いられていた方法はグルポイドによるものがほとんどであった。また、Exel は、部分接合積、逆半群などを用いて研究を行ってきた。グルポイドは関数表示されているため直感的にわかりやすく、研究を進めやすい。しかし一方では、自己相似写像等が分岐点をもつ場合には、グルポイドがエタールでなくなり、研究が困難になる。

(2) その後、Pimsner は接合積、非可逆離散力学系など多くの対象を含むような、柔軟な構造を持つ双加群を用いた C^* -環の構成を与えた。これは、さまざまな古典的な C^* -環の構成、Cuntz-Krieger 環、Matsumoto の定義した sub-shift によって与えられる C^* -環などの構成をすべてを含んでいる。注目すべきは、この時点においてすでに、分岐点についても考慮をはらっていたことである。接合積等においては Pimsner-Voiculescu が K -群についても一般的な公式を導いていたが、Pimsner は、これらを例に含むような一般的な公式を導いている。さらに、Pimsner は、双加群を用いて作った C^* -環、すなわち Pimsner 環のコアについての重要な命題を導き、我々の本研究の助けになっている。ただし、Pimsner 環は、グルポイドより解析が厄介なことが欠点である。

(3) 少し前、我々は、リーマン球面上の有理関数力学系、および分岐点を持つ自己相似写像から Pimsner の構成法によって C^* -環を構成し、付随する C^* -環が、単純、純無限、核型などの良い性質をもつことを示した。Kirchberg により、このような C^* -環は K -群で分類可能であることが示されている。さらに、我々は、有理関数力学系、自己相似写像に付随する C^* -環の代数的な性質からもとの自己相似写像、リーマン球面上の有理関数力学系等の性質を復元する研究を行ってきた。

(4) 引き続き、これらの非可逆離散力学系に付随する KMS 状態の完全な分類を行い、特にリーマン球面上の有理関数力学系において、KMS state の情報から、もとの有理関数についてのさまざまな情報を得ていた。KMS state が力学系に付随する C^* -環のコアに強く関連していることより、近年は C^* -環全体よりも、ゲージ作用不変環、すなわちコアの研究に重点を移している。その理由としては、記号力学系の例を見ると、環全体と同様に、コアが力学系の情報を多く含んでいることによるものである。ただし、コアの K -群等の構造は複雑で、解析は容易ではない。

2. 研究の目的

(1) これまでに分岐点を持たない場合の定義を拡張して、自己相似写像の次元群を、Pimsner 環の中の等距離写像を持って定義していた。しかし、テント写像、シェルピンスキ・ギャスケットなどの具体例の計算を実行すること、および計算結果をわかりやすく表示することができていなかった。これらの基本的な例に対して、付随するコアの K_0 群を計算し、また、標準的準同型の記述を行うことを、研究目的とする。

(2) 記号力学系、マルコフシフトなどにおいては空間が完全不連結であり、特性関数が連続になることなどにより、軌道力学系を調べる場合に助けになっていた。完全不連結の場合と異なり、自己相似写像、リーマン球面上の自己相似写像のように空間が連続な場合においては、力学系の軌道同型の研究は、特性関数が連続にならないなどの技術的な困難により、これまでほとんど行われていない。そのためには、対角元にあたる係数環の性質を調べることが必要である。この研究において、自己相似写像等の軌道同型を調べるための第一歩として、係数環が極大可換環であることを示すことも、研究目的とする。可能であれば、係数環がカルタン部分環であるかどうかを知ること、研究目的であった。

(3) 本研究の直前の研究において、自己相似写像に付随する C^* -環の有限コアの行列表現を定義し、基本的な定理を示しており、テント写像、シェルピンスキ・ギャスケットなどの例において、行列表現の具体的な形について得ていた。さらに、より一般的な状況において、付随する C^* -環の有限コアの行列表現の像の直和分解の理論を作り、それを用いて、コアの K -群、さらには次元群の構造を明らかにする。

(4) テント写像など、分岐点について簡単な性質を満たす自己相似写像の直積についても解析し、付随する C^* -環のコアのトレース及イデアルについて研究を行い、この分野の端緒をつけることを目指す。また、この例を含むより一般的な状況において、トレースの核が原子イデアルになる状況について、調べる。

3. 研究の方法

- (1) 自己相似写像に付随する C^* -環のコアのトレースの分類に加えて、コアの原子イデアルがトレースの核になることを調べるためにこれまで自己相似写像に付随する C^* -環のコアの行列表現についての理論を整備してきた。状況が一般化すると分岐点が高次元になり、トレース及びイデアルの解析が困難になるので、新しい手法を開発する。また、テント写像などの具体例では、直積構造から得られる K 群的な情報も調べる。
- (2) 自己相似写像、リーマン球面上の有理関数力学系に付随する C^* -環について、力学系の軌道同型に関して連続空間が関連している性質を詳しく調べる。さらに、付随する C^* -環の係数環の性質を詳しく調べる。
- (3) シェルピンスキ・ギャスケットの高次元版に対応するシェルピンスキ・カーペットについて、付随する C^* -環の解析を行う。この場合はテント写像の直積の場合と違って、空間が直積構造を持っていないので、テント写像の直積の場合とはことなる手法が必要となる。なお、より高次元のシェルピンスキ・カーペットについても、特異点の観点から研究する必要がある。
- (4) 自己相似写像、有理関数力学系などに付随する C^* -環のコアの K_0 群を記述するための最も率直な方法は帰納極限であるが、帰納極限で表される群全体の構造を知ることは容易ではない。そこで、 K_0 群の生成元と以前構成していたコアの離散モデルトレースのペアリングを取り、 K_0 群を数の列で表現できれば、コアの K_0 群と標準同型をわかりやすく表示できる可能性がある。この手法を進める。
- (5) テント写像は、1次元区間力学系の最も簡単な例である。従って、1次元区間力学系についても、付随する C^* -環のコアについて、行列表現の直和分解、 K_0 群の計算、次元群の計算などを行う。なお、次元群の情報からもとの力学系の情報、すなわち区間力学系における線分の本数などに、(4) において新しく開発する予定の方法を適用する。
- (6) 以前からの共同研究者と研究協力を行う。また、研究会、セミナーなどの機会を利用して、研究情報の収集、意見交換などを行う。
- (7) リーマン球面上の有理関数力学系の軌道の挙動を調べ、理論的な予測を行うために、計算機で、数式及び数値計算を行う。

4. 研究成果

- (1) 自己相似写像に関して、分岐点がある有限個、また分岐点の連鎖が存在しないなどの条件を付けて、自己相似写像に付随する C^* -環のコアのイデアルが、以前において、コアのトレースの分類の際に定義した離散モデルトレースと一対一に対応することを示し、すでに公表していた。そこで開発した自己相似写像に付随する C^* -環のコアの行列表現の手法を、強い仮定から弱い仮定を満たす状況に一般化することができた。この結果は一部数学会で発表しており、将来的に論文で公表する予定である。
- (2) 球面上の有理関数力学系に付随した C^* -環において、ジュリア集合に制限して構成した Pimsner 環において、係数環である $C(A)$ が極大可換環であることを示し、論文 "Maximal abelian C^* -algebras of C^* -algebras associated with self-similar map and complex dynamical systems" において公表した。有理関数力学系なので、分岐点が存在する場合を取り扱っており、フォン・ノイマン環を補助的に使うなど、技術的に困難があった。ただし、係数環 $C(A)$ がカルタン部分環であるかどうかは、この時点では判定できなかった。
- (3) テント写像及びシェルピンスキ・ギャスケットなどの仮定 B を満たす基本的な自己相似写像において、付随する C^* -環のコアについて、 K_0 -群の計算を行った、両方の例において、 K_0 群を帰納極限の形で表すことができたが、帰納極限をわかりやすい群の形に変形することは困難であった。テント写像の例については、離散モデルトレースとコアの K_0 群の生成元のペアリングを取ることで、コアの K_0 群が整数群 \mathbb{Z} になることを示した。また、コアの K_0 群への標準的準同型が、一方向のシフトと同型になることを示した。これらの結果は、"Dimension groups for self-similar maps and matrix representations of the core of the associated C^* -algebras" において公表した。自己相似写像が分岐点を持たない場合には、 K_0 群の階数が 1 になり、実数群にトレースによって埋め込まれることと対比すると、状況が大きく異なる。この段階では、シェルピンスキ・ギャスケットの場合には、コアの K_0 群について帰納極限で表すことはできていたが、行列が非常に複雑で、 K_0 群の形、および標準的な自己準同型の形を求めることはできていない。
- (4) シェルピンスキ・ギャスケット、および 1次元区間力学系などの基本的な例において、 K_0 群の生成元と離散モデルトレースのペアリングを取って K_0 群を数列空間で表現することができた。結果の一部については、日本数学会においてすでに発表しており、また、論文 "Dimension groups for self-similar maps and matrix representations of the core of the associated C^* -algebras" においても、一部の結果のみ発表している。離散モデルトレースの有限コアへの制限が複雑であり、この部分については、将来的に論文の形で公表する予定である。
- (5) コアの離散モデルトレースは、分岐点を持つ自己相似写像において始めて現れたトレースの属である。離散モデルトレース全体への作用を二つ見つけることができ、それによってトレースのパラメータを復元することができた。一つは、コアへの標準的自己準同型を調べる際に有力

である。また、離散モデルトレースと離散的な KMS 状態の性質を明らかにすることができ、以前の研究において分岐点の逆像について示していた結果を復元することができた。

(6) テント写像の直積、および強い条件 (仮定 B) を満たす自己相似写像の直積が、若干弱いが行列表現、コアの解析などには十分な条件 (仮定 C) を満たすことを示した。この結果については、すでに日本数学会で発表している。なお、結果が少し短いので、他の結果と合わせて論文として発表することを計画している。なお、テント写像の直積は、folding の形の分岐点を作るので、この分岐点を C^* -環によって解析的に調べることは、興味ある問題である。また、テント写像の直積に付随する C^* -環を調べている過程で、テント写像に付随する C^* -環に、互いに共役でない極大可換環が加算無限個存在することを発見した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Tsuyoshi Kajiwara and Yasuo Watatani	4. 巻 73
2. 論文標題 Dimension groups for self-similar maps and matrix representations of the cores of the associated C^* -algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Canadian Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1013-1056
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4153/S0008414X20000309	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Kajiwara and Y. Watatani	4. 巻 455
2. 論文標題 Maximal abelian C^* -subalgebras of C^* -algebras associated with self-similar maps and complex dynamical systems	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Application	6. 最初と最後の頁 1383-1400
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2017.06.044	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 梶原 毅
2. 発表標題 分岐点を持つ自己相似写像と C^* -環
3. 学会等名 RIMS 共同プログラム 作用素環における群作用と数理論理の関連（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 梶原 毅
2. 発表標題 区間力学系の特異点と生成する C^* -環の次元群
3. 学会等名 作用素論作用素環論研究集会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 T. Kajiwara
2. 発表標題 Branched points and operator algebras
3. 学会等名 Functional analysis and operator algebra seminar between Japan and Indonesia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 梶原 毅
2. 発表標題 高次元分岐点集合をもつ自己相似写像に付随する C^* -環とコア
3. 学会等名 作用素論作用素環論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 梶原 毅、綿谷 安男
2. 発表標題 高次元の分岐点集合を持つ自己相似写像に付随する C^* -環の次元群
3. 学会等名 日本数学会年会 (中止、講演成立)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 梶原 毅、綿谷 安男
2. 発表標題 分岐点を持つ自己相似写像に付随する C^* -環の次元群
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 梶原 毅、綿谷 安男
2. 発表標題 シェルピンスキギャスケットに付随する C^* -環の次元群
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 綿谷 安男、梶原 毅
2. 発表標題 テント写像による自己相似写像系の次元群の計算
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 梶原 毅、綿谷安男
2. 発表標題 シェルピンスキカーペットに付随する C^* -環の解析
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 綿谷安男、梶原 毅
2. 発表標題 複素力学系や自己相似写像系から作られる C^* -環の極大可換環とコアの次元群
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 梶原 毅、綿谷安男
2. 発表標題 高次元の分岐点集合を持つ自己相似写像に付随する C^* -環のコアのイデアル
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------