

令和 5 年 6 月 2 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2022

課題番号：16K05180

研究課題名（和文）作用素環における自己同型からくる対称性の研究

研究課題名（英文）Research of symmetries arising from automorphisms of operator algebras

研究代表者

増田 俊彦（Masuda, Toshihiko）

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：60314978

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：作用素環の自己同型群に着目して、そこから生じる対称性について研究した。主に以下の成果をあげた。1. テンソル圏の単射的III₁型因子環へのロバーツ作用の分類。2. III₁型因子の包含関係からくる相対的再中心化環の流れに関する安藤-Haagerup-Houdayer-Marakechの予想について、小さい環が特に単射的の時に肯定的解決を与えた。3. 離散従順亜群の単射的因子環への外部的作用(G核)の分類を行った。証明も従来のモデル作用を使用して障害類を取り除く方法でなく、より自然な証明を与えた。4. エルゴード理論の軌道同値に関する離散従順群の作用の分類も行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

私の研究によって、作用素環の群作用や自己同型群の対称性の理解がより深まった。特にテンソル圏との関連において深い理解が得られたと考える。またエルゴード理論のように作用素環と関連する分野においても、作用素環論に由来するアイデアが有効に使えることも明確となり、理論の発展に大きく寄与した。

研究成果の概要（英文）：I studied the symmetries of operator algebras by focusing on automorphism groups of operator algebras. I obtained the following results mainly. 1. Classification of Roberts actions of tensor categories on the injective type III₁ factor. 2. I solved the conjecture of Ando-Haagerup-Houdayer-Marakech about the flows of relative bicentralizer associated with inclusion of type III₁ factors when small algebra is injective. 3. I classified outer actions (G-kernels) of discrete amenable groupoids on injective factors. My proof does not require the method of model actions to get rid of obstruction, and it is more natural. 4. I classified actions of discrete amenable groups on orbit equivalence of ergodic theory.

研究分野：作用素環論

キーワード：因子環 自己同型群 対称性 群作用

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

作用素環論においては、その創始時期より、自己同型群や群作用の研究が常に重要な位置を占めており、現在においてもこの主題は作用素環論における中心的なテーマである。これは群作用や自己同型が作用素環の対称性を表していること、また作用素環の構造の解明に不可欠な役割を持つためである。一方で群作用の研究は Jones による作用素環の指数理論を経て、部分因子環の分類理論に発展した。部分因子環論においては、包含関係から自然に生じるテンソル圏が部分因子環の対称性を記述するもので、群作用をより一般化したものと考えることができる。私はこれまで群作用や、テンソル圏の研究を通じて、作用素環の対称性を研究してきた。特に最近はより抽象的な観点からのテンソル圏の研究が発展しており、作用素環的な取り扱いにも新しい側面を与えているように思える。実際に部分因子環の分類理論を用いて、伝統的な群作用の結果を導く、という手法もいろいろ確立されている。そこで伝統的な群作用の視点と、最近のテンソル圏の研究の発展をうまく組み合わせることにより、作用素環の対称性についての理解をより深めていくことが期待される。

2. 研究の目的

自己同型群や、群作用の研究など作用素環の対称性を表す対象を研究することによって、分類理論を証明したり、作用素環の構造や性質を明らかにする。また群作用を更に一般化して、テンソル圏の作用素環への作用を研究することにより、群作用の研究について、新たな知見を得たり、部分因子環の構造を解明することを目的とする。

3. 研究の方法

私がこれまで発展させてきた Evans-Kishimoto に由来する intertwining argument の手法の他、テンソル圏の理論、部分因子環の手法や、部分因子環の分類理論などを応用することにより、様々な分類理論や、作用素環の構造の解明を行う。

4. 研究成果

以下の成果を上げた。

1. テンソル圏のロバーツ作用の分類。 C^* テンソル圏が与えられたとき、そこから真無限因子環の自己準同型の集合へのテンソル関手をテンソル圏のロバーツ作用という。特にテンソル圏が有限生成、従順で、因子環が単射的 III₁ 型因子環であるとき、作用をモジュラー自由、という仮定のもとで分類を与えた。テンソル圏が有限な場合は泉によって分類が得られていたが、私の結果はこの一般化にあたる。Popa による III₁ 型部分因子環の分類理論と、Loi による部分因子環上の自己同型の不変量と私の昔の仕事の一般化を組み合わせることにより証明を与えた。系として、有限生成な離散従順群の作用の分類や、コンパクトリー群の双対の作用の分類が従う。特に後者はコンパクトリー群の極小作用についての分類にも応用可能である。本結果は適当に修正することにより III₁ 型や II₁ 型因子環への C^* テンソル圏のロバーツ作用の分類にも適用できる。
2. 相対的再中心化環上の流れの研究。再中心化環は、もともと III₁ 型因子環の研究のために Connes によって導入され Haagerup によっていろいろ研究された。また私の以前の研究によって III₁ 型部分因子環の研究のために相対的再中心化環が一般化として導入された。ところで、安藤-Haagerup-Houdayer-Marrakchi によって(相対的)再中心化環上に流れ(一係数自己同型群)が自然に定義されることが示され、相対的再中心化環上の流れと、相対的荷重の流れが同型ではないか、という予想が提示された。この予想について、私は部分因子環の小さいほうの環が単射的であるときに肯定的に解決した。証明においては、Popa による指数有限な部分因子環についての相対的再中心化環の自明性、泉-Longo-Popa による離散包含関係のフーリエ展開と泉による自己準同型の標準拡大の理論を用いた。また実際に二つの流れが同型となるような例も構成した。構成方法としては接合積から生じる包含関係と有限指数の部分因子環をうまく合わせる方法で構成を行った。
3. 離散従順亜群の外部的作用(G-核)の分類。離散従順群の単射的因子環への作用は Connes の自己同型の分類に始まり、様々な人の手によって完成された。その後私は、統一的な観点からの証明を与えた。これを離散従順亜群に拡張することは自然な問題で、実際コンパクト可換群の作用の分類のためには、離散従順亜群の分類が必要とされる。離散従順亜群の通常的作用については、Jones-竹崎、Sutherland-竹崎、河東-竹崎の結果があるが、いずれもモデル作用をうまく使って、ある種の障害類をうまく消す、という技法が用いられてきた。前述したように、私は離散従順群の作用の統一的証明を以前与えたが、この結果を用いると、モデル作用を用いた障害類を消す、という議論が不要となり、より自然な証明を与えることが可能となった。この議論を外部的作用(G-核)の場合に拡張するのもそれほど困難でなく、ある種のコホモロジー類が完全不変量であることを示した。なお上述した Sutherland-竹崎の論文では、証明の一部でモデル作用の性質を適用する箇所に瑕瑾があるのだが、私の方法

だとモデル作用を用いないので、この部分を回避できた。また不変量を実現する作用のより自然な構成も与えた。その際に鍵になるのが、不変量が自明であるような外部的作用を構成することであるが、この部分には離散従順群上の酔歩の理論を使用した。

4. エルゴード変換の軌道同値を保つ群作用の分類。エルゴード理論と作用素環は作用素環の創始依頼深い関係があるが、エルゴード変換の同値関係を保つような変換群への離散従順群の作用を研究した。このような結果は、Connes-Krieger, Bezuglyi-Golodets などによって得られてきたが、彼らの手法はエルゴード変換の型に大きく依存するものであった。3の項目でも述べたが、因子環への群作用の分類については私によって型によらない証明が与えられたが、この場合でも型によらない証明を与えることが可能かどうかは自然な疑問として生じる。この仕事において、実際にこれまでの私の技法をうまく変形して、適用することにより、型によらない統一的な証明を与えることに成功した。ここで鍵になるのは、Connes-Krieger による充足群の解析的な特徴付け、浜地-押川による、標準順同型の核の特徴付け、及び Ocneanu による Rohlin 型定理の変形である。分類結果は因子環の群作用の分類の不変量とパラレルになるが、この場合のほうがやや簡単であって、基本的には標準順同型の像によって分類がなされる、という結果となる。なおこの研究は論文にまとめて、現在投稿中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 Toshihiko Masuda	4. 巻 -
2. 論文標題 Classification of outer actions of discrete amenable groupoids on injective factors	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Toshihiko Masuda	4. 巻 56
2. 論文標題 On the Relative Bicentralizer Flows and the Relative Flow of Weights of Inclusions of Factors of Type III ₁	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 391--400
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/PRIMS/56-2-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Toshihiko Masuda	4. 巻 121
2. 論文標題 A simple sufficient condition for triviality of obstructions in the orbifold construction for subfactors	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Mathematica Scandinavia	6. 最初と最後の頁 101--110
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.7146/math.scand.a-26240	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Toshihiko Masuda	4. 巻 28
2. 論文標題 Classification of Roberts actions of strongly amenable C^* -tensor categories on the injective factor of type III ₁	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1750002
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X17500525	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 T. Masuda, and R. Tomatsu	4. 巻 244
2. 論文標題 Rohlin flows on von Neumann algebras	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Memoirs of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/memo/1153	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 T. Masuda, R. Tomatsu	4. 巻 245
2. 論文標題 Classification of actions of discrete Kac algebras on injective factors	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Memoirs of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/memo/1160	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 増田俊彦
2. 発表標題 Classification of outer actions of discrete amenable groupoids on injective factors
3. 学会等名 日本数学会函数解析分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 増田俊彦
2. 発表標題 Classification of outer actions of discrete amenable groupoids on injective factors
3. 学会等名 研究集会「作用素環論の最近の進展」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 増田俊彦
2. 発表標題 Outer actions (G-kernels) of discrete amenable groupoids on injective factors
3. 学会等名 東大京大合同オンライン作用素環セミナー
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 増田俊彦
2. 発表標題 On the relative bicentralizer flows and the relative flow of weights of inclusions of factors of type III ₁
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 増田俊彦
2. 発表標題 On the relative bicentralizer flows and the relative flow of weights of inclusions of factors of type III ₁
3. 学会等名 作用素論作用素環研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 増田俊彦
2. 発表標題 Classification of Roberts actions of strongly amenable C*-tensor categories on the injective factor of type III ₁
3. 学会等名 東大作用素環セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 増田俊彦
2. 発表標題 富田竹崎理論の紹介とそれに関連する話題
3. 学会等名 第56回実函数函数解析合同シンポジウム
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 増田俊彦
2. 発表標題 Tannaka-Krein-Woronowicz duality from the viewpoint of Q-systems,
3. 学会等名 日本数学会函数解析分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 増田俊彦
2. 発表標題 強従順な C^* テンソル圏のロバーツ作用の分類について
3. 学会等名 日本数学会函数解析分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 増田俊彦
2. 発表標題 強従順な C^* テンソル圏のロバーツ作用の分類について
3. 学会等名 作用素環論エルゴート理論セミナー
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 増田俊彦
2. 発表標題 Classification of Roberts actions of strongly amenable C^* -tensor categories on the injective factor of type III ₁
3. 学会等名 東大作用素環セミナー
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------