

令和元年6月20日現在

機関番号：33923

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05185

研究課題名(和文) 組み合わせ論的零次元位相力学系の研究 - Bratteli-Vershik系を超えて

研究課題名(英文) Combinatorics study of zero-dimensional systems - beyond Bratteli-Vershik systems

研究代表者

下村 尚司 (Shimomura, Takashi)

名古屋経済大学・経済学部・教授

研究者番号：30440770

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：同相極小零次元系の理論を同相でない場合に拡張し、カオスの事例構築も行う計画であった。位相的ランクを拡張し、自然拡大の位相的ランクが増加しないことを示した。極小代入力学系を生成する代入写像の特徴付けに成功した。ランク2の proximal なCantor系が全て residually scrambled であることを示した。

極小性を離れ、有限ランクBratteli-Vershik系が全て、odometer を除いて拡大的であることを示した。更に重要なことは、同相な零次元系が全て、非自明なBratteli-Vershik系として表現でき、basic set と呼ばれる集合を持つことを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

組み合わせ論的零次元系の理論は、 C^* 環のある程度計算可能な具体的議論として、とても重要なものです。何故なら、 C^* 環の理論は、量子場の理論と深く関連しており、その量子場の理論はもはや研究の枠を越え、量子コンピュータの実現という、極めて重要な社会的目標を持つものだからです。

もっとも、私の研究成果は、基礎的なものに留まります。Bratteli-Vershik表現というものは、位相的ベルヌーイ系を含む、とてつもなく広大な零次元系達の class を、上記 C^* 環の計算可能な構造と深く関連させることができるものです。私の研究は、このBratteli-Vershik表現についての、基礎的な考察です。

研究成果の概要(英文)： My plan was to extend the case study of minimal homeomorphic zero-dimensional systems, and to construct chaotic cases. I could extend the notion of topological rank, showing that the natural extensions have no greater ranks. I could characterize substitution maps that create minimal subshifts. Rank 2 proximal Cantor systems were residually scrambled.

Apart from minimality, finite rank Bratteli-Vershik systems were expansive if they do not have odometers. More importantly, all homeomorphic zero-dimensional systems had non-trivial Bratteli-Vershik representation, including the basic sets.

研究分野：力学系，組み合わせ論的零次元系

キーワード：Bratteli-Vershik system zero-dimensional system subshift minimal topological rank residually scrambled

1. 研究開始当初の背景

(1) 1990年代以降、同相的零次元極小系について Bratteli-Vershik 表現が考案され、 C^* 環論との関係の深さから（強）軌道同型、 C^* 環の K 理論、そしてエルゴード理論を巻き込み、強力な研究が推進されてきた。私は別途 Bratteli-Vershik 表現を広範に拡張したグラフ被覆を考案していたが、Bratteli-Vershik 表現との関係の深さを指摘され、拡張されたグラフ被覆を用いて、同相的極小零次元系以外の対象に対して研究を拡張することができないかと考えた。

(2) 従来の位相力学系の事例構成には、記号力学系を用いる方法などがあったが、有限グラフの帰納的極限による、組み合わせ論的かつ帰納的定義による構築方法は少なくとも頻繁には用いられていなかったと認識している。

2. 研究の目的

(1) 有限グラフ被覆の射影的極限として、あらゆる零次元系が表現される。この方法を簡単のために「被覆系」と呼ぶ。被覆系は必然的に Bratteli-Vershik 表現の拡張となっている。従来の研究では、同相な極小零次元系に対して、Bratteli-Vershik 表現を用いて議論されてきた、すなわち当初の研究に於いては、同相であるという制限と、極小であるという制限があった。そのうち、極小であるという制限は、Medynets 氏達により周期点を持たない系に拡張されている。従って周期点を持つ系達や、そもそも同相でない系達に対する研究は Gambaudo 及び Martens 氏達のもの以外無かったと言って良いであろう。被覆系を用いて、これらの研究を同相でない零次元系や周期点を持つ零次元系に拡張することを目的とした。

(2) 被覆系は位相力学系の事例構成を零次元系の内部で為すことに長じていると思われる。そこで、カオス的な零次元系の事例構築を被覆系を用いて為すことをも目的とした。

3. 研究の方法

(1) 上記「研究の目的」でも記した様に、「被覆系」を用いることが拡張の方法である。当初、対象を同相でない極小零次元系に拡張することを考えた。以下の3つを拡張の企図としていた。

- (a) 一群の同相的極小零次元系には、位相的ランクという自然数が割り振られている。同相でない極小零次元系にも位相的ランクを定義することが出来るが、その自然拡大である同相的極小零次元系の位相的ランクは無限になる場合があるかも知れないと考えられた。これを示すことを試みた。
- (b) 極小代入力学系に対して対応する。
- (c) 角谷同型の概念を拡張する。

(2) Li-York カオス系を被覆系を用いて構築する。

4. 研究成果

(1) 上記のように、位相的ランクは自然拡大を取ることによって増加するのではないかという疑問があった。結論から言うと、この予想とは逆に、有限な位相的ランクを持つ、極小零次元系の自然拡大は、やはり有限な位相的ランクを持ち、しかも元の零次元系の位相的ランクを超えないことが明らかに出来た。この結果をまとめた論文は、Kyushu J. Math. (2017) に掲載された。

(2) 位相的有限ランク性に関する成果としては、Downarowicz 及び Maass 氏達による、同相的極小零次元系が有限な位相的ランクを持つ場合に、odometer でなければ拡大的（記号力学系と位相同型となる）であるというものが知られていた。更にこの結果は、Medynets 氏達により周期点を持たない系にまで拡張されていた。私は期間中にこの命題を周期点を持つ場合を含め、同相で有限ランクを持つ零次元系全般に拡張できることを明らかにした。この結果をまとめた論文は、Proc. Amer. Math. Soc. (2017) に掲載された。

(3) 極小代入力学系に対して、被覆系を用いた成果を得る目的であった。しかし、その準備段階に於いて、極小な代入力学系の特徴付けをもたらす基本的な定理の欠落が課題となった。この問題に取り組み、極小な代入力学系をもたらす代入写像の特徴付けを明確化できた。この成果をまとめた論文は Topol. Appl. (2019) に掲載された。

(4) 実は、この研究目的の水面下で、過年度に申請し却下された研究計画があった。一般の同相的零次元系に対して、私の被覆系を用いなくても、Bratteli-Vershik 表現を用いて表現可能であろうとの見通しである。Bratteli-Vershik 表現は、被覆系の中でも突出して良い性質を持っている。初年度にこの問題を解決できた。具体的には、非常に良い性質を持つ Bratteli-Vershik 表現を用いて、あらゆる同相的零次元系が表現できることを示した。例えば basic set と呼ばれる集合が、あらゆる同相的零次元系に存在することが示し得る。この basic set とは、あらゆる軌道が高々1回しか交叉しない閉集合であり、その basic set を含む任意の近傍は逆にあらゆる軌道と交叉するものである。Bratteli-Vershik 表現は C^* 環論とも密接に

関連があるので、あらゆる同相的零次元系に於けるとても基本的な成果である。これはとても重要なことであり、例として挙げるならば位相的ベルヌーイ系やマルコフ系を C^* 環と関連付ける糸口になり得る。もとよりそれに留まらず、あらゆる零次元系であるから、それらを拡張した有名な記号力学系全てについて、良い性質を持つ Bratteli-Vershik 表現は、 C^* 環との関連をもたらすものである。更に、記号力学系に於いて著名な、Krieger の補題があらゆる零次元系に於いて成立することを同時に示した。これらの結果を論文にまとめ、投稿を試みているが、証明の可否ではなく、書きぶりに難点があるとして、また、投稿先を変更したため、未だに受理されていない。

(5) 被覆系を用いた事例構成については、単なる事例構築に留まらない成果を得る事になった。見えるカオスの事例を構築したかったのであるが、scrambled set が residual となる場合を考察した。具体的には、位相的ランクが 2 であるような proximal なカントール系（零次元系の主たるもので、相空間がカントール集合となるもの）が residual な scrambled set を持つという結果を得た。これをまとめた論文は、Dynam. Syst. (2018) に掲載された。しかしながら、scrambled set が residual であるという性質は、逆にカオスとは縁遠いという指摘もある。この研究以前に得た、相空間全域が scrambled set となる事例構成と併せてみても、私自身はそう思っている。

5. 主な発表論文等

発表論文

1. A simple approach to minimal substitution subshifts, Takashi Shimomura, Topol. Appl. Vol. 260 (2019), pp.203-214 (査読有り) .
2. Rank 2 proximal Cantor systems are residually scrambled, Takashi Shimomura, Dynam. Syst., Vol. 33 (2018), pp.275-302 (査読有り) .
3. Finite-rank Bratteli-Vershik homeomorphisms are expansive, Takashi Shimomura, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 145 (2017), pp. 4353-4362 (査読有り) .
4. Topological rank does not increase by natural extension of Cantor minimals, Takashi Shimomura, Kyushu J. Math. Vol. 71 (2017), pp. 299-309 (査読有り) .

学会等での発表

1. Bratteli-Vershik models and basic sets, 下村 尚司, エルゴード理論とその周辺 (於 大阪大学), 2018 年 11 月 24 日
2. Characterization of substitution map for minimal substitution subshifts, 下村 尚司, 日本数学会秋季総合分科会 (於 岡山大学), 2018 年 9 月 26 日
3. Proximal Cantor systems with topological rank 2 are residually scrambled, 下村尚司, 日本数学会秋季総合分科会 (於 山形大学), 2017 年 9 月 14 日
4. Topological rank does not increase by natural extension of Cantor minimals, 下村 尚司, 日本数学会秋季総合分科会 (於 山形大学), 2017 年 9 月 14 日
5. 零次元系と Bratteli-Vershik 系, 下村 尚司, 微分方程式ワークショップ岐阜 (於 岐阜大学), 2017 年 3 月 8 日
6. Bratteli-Vershik representation, finite rank, and residually scrambled systems, 下村 尚司, 冬の力学系研究集会 (於 軽井沢), 2017 年 1 月 10 日

7. Natural extension does not increase topological rank, 下村 尚司, 冬の力学系研究集会 (於 軽井沢), 2017年1月7日
8. Topological rank of natural extensions of minimal sets, 下村 尚司, エルゴード理論とその周辺 (於 筑波大学), 2016年11月24日
9. Bratteli-Vershik representation, finite rank and proximal systems, 下村 尚司, エルゴード理論とその周辺 (於 筑波大学), 2016年11月24日
10. 零次元同相写像の Bratteli-Vershik 表現, 下村 尚司, 日本数学会秋季総合分科会 (於 関西大学), 2016年9月17日
11. 周期点を持つ有限ランク Bratteli-Vershik 系の拡大性, 下村 尚司, 日本数学会秋季総合分科会 (於 関西大学), 2016年9月17日

〔雑誌論文〕 (計 4 件)

〔学会発表〕 (計 11 件)

〔図書〕 (計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

大学の Web サイト <https://sites.google.com/a/nagoya-ku.ac.jp/takashi-shimomura/>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：いない

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号 (8桁)：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：いない

ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。