

令和元年6月26日現在

機関番号：35403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05186

研究課題名(和文) Macdonald多項式の明示的公式と付随する代数構造の研究

研究課題名(英文) Research of explicit formulas and associated algebraic structures for Macdonald polynomials

研究代表者

星野 歩 (Hoshino, Ayumu)

広島工業大学・工学部・准教授

研究者番号：30598280

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：1. 一列型のKoornwinder多項式やB, C, D型Macdonald多項式の超幾何級数的な明示公式, 一列型C, D型Macdonald多項式の組合せの明示公式の構成, 2. 一列型C型Macdonald多項式と単項対称多項式間の遷移行列の, Catalan数の $b, q, t$ -変形を用いた構成, 3. 一列型B, C, D型 $t$ -Kostka多項式の構成, 4. 一列型Koornwinder多項式のパラメータを退化させた多項式列間の遷移行列の構成, 5. C型Macdonald多項式のある種のPieri公式の予想, 6. 無限系列アフィン量子群の可積分最高ウェイト表現の結晶基底の多面体表示の構成, を実施した.

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では, 一列型のKoornwinder多項式やB, C, D型Macdonald多項式の明示公式を構成し, また, 一列型Koornwinder多項式のパラメータを特殊化した多項式間の遷移行列達をBressoudやKrattenthalerのmatrix inversionを用いて記述し, これらの遷移行列達が多項式の階数に依存しないことを発見した. この事実はA型以外のMacdonald多項式においては知られていない. また, 応用として, Catalan数の $b, q, t$ 変形や一列型B, C, D型Kostka多項式の $t$ -変形の具体的な表示を構成した. これらから, 本研究成果は学術的に価値があると考えている.

研究成果の概要(英文)：1. We constructed explicit formulas for the Koornwinder and Macdonald polynomials of type B, C and D with one column diagrams. We constructed combinatorial expressions for the Macdonald polynomials of type C and D. 2. We constructed explicit forms of transition matrices from the type C Macdonald polynomials to the type C monomial symmetric polynomials with one column diagrams by using  $b, q, t$ -deformations of Catalan numbers. 3. We constructed  $t$ -Kostka polynomials with one column diagrams of type B, C and D. 4. We constructed transition matrices in terms of certain degenerated polynomials for the Koornwinder polynomials. 5. We conjectured certain Pieri rules for the Macdonald polynomials of type C. 6. We constructed polyhedral realizations of crystal bases for the integrable highest weight modules of nonexceptional affine quantum algebras.

研究分野：無限可積分系, 量子群の表現論

キーワード：Macdonald 多項式 Koornwinder 多項式 matrix inversion

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

A型 Macdonald 多項式は、不定元  $q, t$  のなす有理関数体の元を係数とする対称多項式である。量子可積分系に現れる Jack 多項式の  $q$  類似となっており、対称群 (A 型ワイル群) の作用で不変な多項式である。その拡張として Macdonald は有限型ワイル群不変なローラン多項式を定義し、さらに Koornwinder は B, C, D 型 Macdonald 多項式を含む BC 型ローラン多項式 (Koornwinder 多項式) を定義した。これらの多項式は、ウェイトに関する三角性と、各型に応じた  $q$ -差分作用素の固有関数として特徴づけられる (各型に応じた固有値は定義されている)。

Macdonald は、任意の自然数の分割に付随する A 型 Macdonald 多項式を、組合せ論的对象である半標準盤を用いた明示的な和公式として構成した。この和は有限和でありタブロー表示と呼ばれる。研究代表者と研究分担者は先行研究において、A 型変形  $W$  代数の真空期待値を計算し、ある種の特殊化のもとで A 型 Macdonald 多項式のタブロー表示と等しいことを示した。ここで変形  $W$  代数とは、 $W$  代数を不定元  $q, t$  で変形した代数である。

一方、研究分担者と研究協力者は先行研究において、A 型 Macdonald の  $q$ -差分作用素の固有関数を、不定元  $s$  をもつ無限級数として実現した。この無限級数は  $q$ -超幾何級数的な表示をもつ。不定元  $s$  を固有値に特殊化すると無限級数は有限和となり三角性を持ち、タブロー表示と無限級数表示が一致し A 型 Macdonald 多項式が得られる。この無限級数が有限和に収まる条件 (不等式系) は、中島による A 型量子群の可積分最高ウェイト加群の結晶基底の多面体表示と、半標準盤との 1:1 対応を用いて得られる。

他方、A 型以外の Macdonald 多項式の明示的公式については、Lassalle によって、1 行型分割  $(r)$  に対する B, C, D 型 Macdonald 多項式 (以下「1 行型 B 型 Macdonald 多項式」などと呼ぶ) の  $q$ -超幾何級数を用いた明示的な予想式のみが構成されていた。

### 2. 研究の目的

我々が継続して行っている研究の目的は Macdonald 多項式や Koornwinder 多項式の明示的公式の構成と付随する代数構造の解明である。我々の先行研究によって“A 型 Macdonald 多項式の明示的公式と A 型変形  $W$  代数の関係”や“A 型 Macdonald 差分作用素の固有関数の無限級数表示と A 型量子群の関係”が明らかになった。先行研究で 1 行型  $B_n, C_n, D_n$  型 Macdonald 多項式の明示的公式を構成したが、本研究では、より一般の分割に対する同多項式の明示的公式の構成を目的とする。また先行研究で得られた Askey-Wilson 型 (BC1 型) や B2, C2 型 Macdonald 差分作用素の固有関数の無限級数表示から、Koornwinder 型 (BC $n$  型) や  $B_n, C_n$  型 Macdonald 差分作用素の固有関数の無限級数による明示的公式を構成し、付随する代数構造の解明への足掛かりとする。

### 3. 研究の方法

研究代表者らは先行研究において Askey-Wilson 型  $q$ -差分作用素の固有関数の無限級数表示を構成し、応用として 1 行型  $B_n, C_n, D_n$  型 Macdonald 多項式の明示式を構成した。また  $C_n, D_n$  変形  $W$  代数の表現論を用い、1 行型  $C_n, D_n$  型 Macdonald 多項式のタブロー表示を構成した。これを踏まえて、次の (1), (2), (3) の方法を実施することにより、研究目的の遂行に臨んだ。

- (1) 1 列型 B, C, D 型 Macdonald 多項式の明示的公式の構成
- (2) C 型 Macdonald 多項式の Pieri 公式の構成
- (3) 量子群の結晶基底の多面体表示の構成

- (1) 1 列型 B, C, D 型 Macdonald 多項式の明示的公式の構成

1 行型の手法を模倣し、「分割  $\lambda$  に対する BC $m$  型 Koornwinder 多項式の明示式から共役な分割  $\lambda'$  に対する BC $n$  型 Koornwinder 多項式の明示式を構成する機構」を創出し、先行研究で得られた 1 行型 Koornwinder 多項式の明示公式を適用し、1 列型 Koornwinder 多項式の明示公式を構成する。

- (2) C 型 Macdonald 多項式の Pieri 公式の構成

上記 (1) で得られた C 型 Macdonald 多項式の明示公式を用い、1 列型  $\times$  1 行型の Pieri 公式を構成する。また、Lassalle によって得られている 1 行型  $\times$  1 行型の Pieri 公式の結果 (パラメータは  $b=t$  と特殊化されている) を参考にし、1 列型  $\times$  1 列型の Pieri 公式を構成する。

- (3) 量子群の結晶基底の多面体表示の構成

先行研究で得られたアフィン D 型量子群の可積分最高ウェイト表現の結晶基底の多面体表示の構成を参考にし、アフィン非例外型量子群の可積分最高ウェイト表現の結晶基底の多面体表示を構成する。これは、Macdonald 多項式の無限級数表示の構成に応用可能だと考えられる。

### 4. 研究成果

(1) 1 列型 Koornwinder 多項式や B, C, D 型 Macdonald 多項式の超幾何級数的な明示公式を構成し、また、1 列型 C, D 型 Macdonald 多項式の組合せ的明示公式を構成した。

(2) 1 列型 C 型 (または D 型) Macdonald 多項式と単項対称多項式間の遷移行列を、Catalan 数の  $b, q, t$ -変形 (または、二項係数の  $q, t$ -変形) を用いて記述した。

(3) 1 列型 Koornwinder 多項式のパラメータを退化させた多項式列間の遷移行列を Bressoud または Krattenthaler の matrix inversion を用いて記述した。特に、これらの遷移行列の成分

はある漸化式を満たし、また、階数に依存しないことを発見した。

(4) 上記(3)の応用として、一列型 B, C, D 型  $t$ -Kostka 多項式の明示式を構成した。

(5) C 型 Macdonald 多項式について、 $n$  行型  $\times$  1 行型の Pieri 公式を、パラメタを  $b=t$  と特殊化したもとで予想した。特に、1 列型  $\times$  1 行型の Pieri 公式の場合、パラメタを  $b=t$  と特殊化せずとも展開係数が因子化することを予想した。

(6) アフィン非例外型量子群量子群の可積分最高ウェイト表現の結晶基底の多面体表示を構成した。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 1 件)

著者：星野歩，白石潤一

題名：Macdonald Polynomials of Type  $C_n$  with One-Column Diagrams and Deformed Catalan Numbers.

掲載誌名：Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA), 14, 101, 33 pages, (2018), DOI: 10.3842/SIGMA.2018.101 査読有り

[学会発表](計 7 件)

国際学会

(1) 発表者：星野歩

題名：Macdonald polynomials of type  $C_n$  with one-column diagrams and deformed Catalan numbers

学会：Symmetries and Integrability of Difference Equations (SIDE) 13, International Conference, 2018 年.

(2) 発表者：星野歩

題名：Tableau formulas for one-row Macdonald polynomials of type  $C_n$

学会名：Discrete Mathematics Seminar, The University of Vienna, 2018 年

(3) 発表者：白石潤一

題名：Macdonald polynomials of type C and  $q$ -Catalan numbers

学会名：Seminar in Saclay, 2018 年

(4) 発表者：星野歩

題名：Tableau formulas for one-row Macdonald polynomials of type  $C_n$

学会名：Algebraic and Enumerative Combinatorics in Okayama, 2018 年

国内学会

(1) 発表者：星野歩，白石潤一

題名：Kostka polynomials with one column diagrams of type  $B_n$ ,  $C_n$  and  $D_n$

学会名：日本数学会年会，2019 年

(2) 発表者：星野歩

題名：一列型  $C_n$  型 Macdonald 多項式と変形カタラン数

学会名：2018 年度 RIMS 共同研究(公開型)「組合せ論的表現論の諸相」, 2018 年

(3) 発表者：星野歩，白石潤一

題名：Matrix inversion for Koornwinder polynomials with one-column diagram

学会名：日本数学会秋季総合分科会，2018 年

(4) 発表者：星野歩，白石潤一

題名：一列型 C, D 型 Macdonald 多項式の明示公式

学会名：日本数学会年会，2018 年

## 6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：白石 潤一

ローマ字氏名：Jun'ichi Shiraishi

所属研究機関名：東京大学

部局名：大学院数理科学研究科

職名：准教授

研究者番号(8桁): 20272536

(2)研究協力者

研究協力者氏名：野海 正俊

ローマ字氏名：Masatoshi Noumi

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。