

令和 2 年 5 月 31 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05192

研究課題名(和文) 可解確率過程の研究

研究課題名(英文) Studies on integrable stochastic processes

研究代表者

今村 卓史 (Imamura, Takashi)

千葉大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：70538280

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：相互作用する確率粒子系の2つのモデル(q-TASEP, SEP)について、それらのもつ代数構造を利用して粒子位置の分布関数を厳密に導出した。qTASEPについては、従来とは異なる手法で定常状態における粒子位置の分布関数の具体形を導出した。SEPについては、可積分確率の研究において最近得られた知見を利用して、粒子位置の分布の大偏差関数を導出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

確率過程の中には様々なモデルがあるが、揺らぎの極限的な振舞いはモデルによらない普遍的なものであることが予想される。しかしその普遍的な構造を抽出することは一般に困難である。本研究は確率過程のモデルの背後に潜む数理構造を利用して、分布関数等を厳密に導出することによって、そのような普遍的な極限分布を具体的に知ろうとするものであり、いくつかのモデルでそれを行うことが出来た。本研究によって、普遍的であると予想される極限分布の構造が明確になった。

研究成果の概要(英文)：In the two models (q-TASEP, SEP) of interacting stochastic particle systems, we have obtained distribution functions of positions of particular particles utilizing their integrable structures. In the q-TASEP, we have got an explicit form of the distribution function in the stationary state applying a new technique different from conventional ones. In the SEP, we have obtained exact large deviation functions of the distribution of the particle position, utilizing some recent developments in the integrable probability.

研究分野：可積分確率

キーワード：確率論 可積分系 KPZクラス 非対称単純排他過程

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

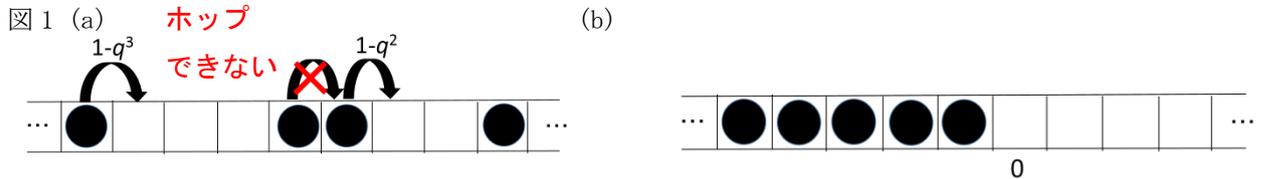
1. 研究開始当初の背景

相互作用する確率粒子系の研究は、数学および理論物理学において活発な研究対象となっている。特にここ数年で、特別な代数構造をもつ一群の「可解」な確率粒子系の存在が明らかになり、カレントや粒子の位置の分布関数を具体的に導出する研究が活発に行われている。その典型的なモデルの一つに、 q 変形完全非対称単純排他過程 (q -Totally Asymmetric Simple Exclusion Process, 以下では q -TASEP と表記する。)がある。 q -TASEP は多粒子のランダムウォークモデルであり以下のルールに従う。各粒子はレート $1 - q^g$ で右隣にホップする。ここで q は $0 \leq q < 1$ を満たすパラメータであり、 g は右側の一番近い粒子との距離 (何サイト離れているか) である。また粒子が隣り合っている場合はホップできず、これが粒子間相互作用を生んでいる (図 1(a))。 q -TASEP は Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) 方程式の離散近似になっていることが知られていて、KPZ クラスの理解を深める上でも重要なモデルとなっている。

q -TASEP は下記で記述されるような行列式構造を持っていることが最近の研究で明らかにされている。 q -TASEP において右から M 番目の粒子の位置を $X_M^q(t)$ とすると、ステップ初期条件 (図 1(b)) からスタートした場合、

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{(\zeta q^{X_M^q(t)}; q)_\infty} \right] = \det(1 + K_\zeta) \quad (1)$$

という関係がマクドナルド過程の手法や確率過程における双対性の手法を用いて明らかにされた。ただし $(x; q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - xq^i)$ であり、 $\zeta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$ を満たす。左辺は $X_M^q(t)$ の確率密度関数の q -ラプラス変換を表し、逆変換によって時刻 t における $X_M^q(t)$ の確率分布関数が得られる。また右辺の行列式は $L_2(\mathbb{R})$ 上の積分作用素 K_ζ のフレドホルム行列式を表す。



2. 研究の目的

(1) 上記の(1)式は図 1(b) で表されるステップ初期条件でのみ得られている。一方で定常状態における q -TASEP の揺らぎの性質を知るためには、ランダムな初期条件において(1)式に相当する関係式を得る必要がある。ところが従来の手法では、 q 変形されたモーメントを解析することにより(1)式を得るが、ランダムな初期条件の場合高次モーメントが発散するため、解析が困難である。本研究の目的はこのようなモーメントに用いない新たな q -TASEP の揺らぎの解析手法を開発し、定常 q -TASEP における粒子位置の揺らぎの分布関数を得ることである。

(2) 上記の(1)の関係式は q -TASEP のみならず、 q -TASEP を特別な場合として含む高スピン頂点模型と呼ばれる確率過程でも成立することが明らかにされつつある。(1)で開発した手法も高スピン頂点模型にも適用可能かを検討する。また定常状態における高スピン頂点模型の揺らぎの解析に応用することが目的である。

(3) 上記の(1)の関係式は、(独立同分布の確率変数列における中心極限定理に相当する)典型的なスケールにおける揺らぎについての詳細な情報を記述している。一方で大偏差関数で記述されるような揺らぎも重要な研究対象である。そこで本研究の目的は(1)を導出するための手法を大偏差関数の解析に応用することである。

3. 研究の方法

q -TASEP の粒子位置のゆらぎは q -Whittaker 測度と呼ばれる q -Whittaker 関数 (Macdonald 関数の 2 つのパラメータ (q, t) のうち $t=0$ としたもの) の 2 つの積で表される測度で記述される。本研究では q -Whittaker 関数の性質 (トーラススカラー積による積分表示、Cauchy の恒等式) を用いて q -TASEP の揺らぎを解析する。また(1)式右辺のような行列式構造を得るために、 q -解析における Ramanujan の和公式や Frobenius 行列式なども利用する。

大偏差関数への応用に関する研究では、具体的には対称単純排他過程 (SEP) における粒子位置の解析を行う。そのためにまず、Tracy-Widom によって得られた非対称単純排他過程 (ASEP) における変形されたモーメントの積分表示に着目しその対称極限を考察することで SEP の粒子位置の大偏差関数を導出する。

4. 研究成果

(1) 東京工業大学の笹本智弘氏と共同で、 q -TASEP の粒子位置のゆらぎについてモーメントに着目しない新たな解析手法を考案し、定常状態 q -TASEP の粒子位置の極限分布を得た。より具体的にはマクドナルド対称関数の性質を用いて、ランダムな初期条件における q -TASEP の位置の分布関数をコンパクトな形で表し、さらに Ramanujan の和公式や Frobenius 行列式 (Cauchy の行列

式公式の楢田関数版)を用いて、粒子位置の q -Laplace 変換が単一の Fredholm 行列式で表されることを明らかにした。また得られた Fredholm 行列式の漸近解析を行うことによって、 q -TASEP の粒子位置の極限分布が Baik-Rains 分布と呼ばれる定常 KPZ クラスを特徴づける分布関数に収束することを明らかにした。

(2) 東京工業大学の Matteo Mucciconi 氏と笹本智弘氏と共同で、研究成果(1)で開発した手法を高スピン頂点模型に適用し、高さ関数の定常分布関数を得た。従来の手法ではモーメント発散の問題があるため適切な正則化の手法が必要であった。Aggarwal はスピン $1/2$ の場合に fusion と呼ばれる量子可積分系で得られた知見を利用してモーメントを正則化することによって定常分布を得ることに成功している。我々は fusion の手法と(1)で開発した我々の手法を組み合わせることにより、他のパラメータ領域における高スピン頂点模型に対して、定常分布の厳密解を得た。

(3) 東京工業大学の笹本智弘氏とサクレ研究所(フランス)の Kirone Mallick 氏と共同で、可積分確率論の手法を用いて得られた ASEP の非対称パラメータで変形されたモーメントの積分表示の対称極限をとることにより、対称単純排他過程(SEP)における粒子位置の大偏差関数の具体系を導出した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Takashi Imamura and Tomohiro Sasamoto	4. 巻 174
2. 論文標題 Fluctuations for stationary q-TASEP	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Probability Theory and Related Fields	6. 最初と最後の頁 647-730
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1007/s00440-018-0868-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takashi Imamura and Tomohiro Sasamoto	4. 巻 198
2. 論文標題 The q-TASEP with a Random Initial Condition	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Theoretical and Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 69-88
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1134/S0040577919010057	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takashi Imamura, Tomohiro Sasamoto	4. 巻 50
2. 論文標題 Free energy distribution of the stationary O'Connell-Yor directed random polymer model	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 285203
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa6e17	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Takashi Imamura, Kirone Mallick, Tomohiro Sasamoto	4. 巻 118
2. 論文標題 Large Deviations of a Tracer in the Symmetric Exclusion Process	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Physical Review Letters	6. 最初と最後の頁 160601
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.160601	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takashi Imamura, Matteo Mucciconi, Tomohiro Sasamoto	4. 巻 online
2. 論文標題 Stationary stochastic Higher Spin Six Vertex Model and q-Whittaker measure	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Probability Theory and Related Fields	6. 最初と最後の頁 1-120
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s00440-020-00966-x	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Takashi Imamura
2. 発表標題 q-Whittaker measures and the Schur measures
3. 学会等名 17th International Symposium Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takashi Imamura
2. 発表標題 q-Whittaker measures and the Schur measures
3. 学会等名 Spectra of Random Operators and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Imamura
2. 発表標題 Fluctuations for stationary q-totally asymmetric simple exclusion process
3. 学会等名 SPA2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takashi Imamura
2. 発表標題 Determinantal structures in the q-Whittaker process
3. 学会等名 Infinite Analysis 17 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 今村 卓史
2. 発表標題 q-Whittaker measures and Schur measures
3. 学会等名 Random matrices, determinantal processes and their related topics (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 今村卓史
2. 発表標題 ランダムな初期配置におけるq-TASEPのゆらぎ
3. 学会等名 日本物理学会2016年秋季大会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 今村卓史
2. 発表標題 q-Whittaker過程における行列式構造
3. 学会等名 ランダム作用素のスペクトルと関連する話題 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 今村卓史
2. 発表標題 Fluctuation properties of the stationary q -totally asymmetric simple exclusion process II
3. 学会等名 Physical and mathematical approaches to interacting particle systems -In honor of 70th birthday of Herbert Spohn- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 今村卓史
2. 発表標題 q -Whittaker 関数に関連する可積分確率過程における 行列式構造
3. 学会等名 日本物理学会第72回年次大会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 今村卓史
2. 発表標題 Determinantal Structures in the q -Whittaker Measure
3. 学会等名 The 12th Mathematical Society of Japan, Seasonal Institute (MSJ-SI) Stochastic Analysis, Random Fields and Integrable Probability (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 今村卓史
2. 発表標題 q -TASEP, stochastic vertex models and the q -Whittaker measures
3. 学会等名 Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----