

令和 2 年 5 月 13 日現在

機関番号：13701

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05198

研究課題名（和文）放物型ハーディー空間とその上で定義された積分作用素に関する研究

研究課題名（英文）Investigation of parabolic Hardy spaces and integral operators on their spaces

研究代表者

山田 雅博（Yamada, Masahiro）

岐阜大学・教育学部・教授

研究者番号：00263666

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：放物型ハーディー空間や放物型ベルグマン空間における性質について研究を行った。これまで、放物型ベルグマン空間における放物型共役関数に関する研究を行ってきた。ここでは、境界関数を上半空間へ放物型調和拡張を行ったLittlewood-Paley型や、Lusin型関数の性質について研究を行った。また、2重放物型調和ベルグマン空間における $p=1$ のときの双対空間の特徴付けの研究を行い、双対空間とその関係を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

近年、ユークリッド空間の上半空間において定義された放物型ベルグマン空間という新しい関数空間が導入され、放物型ベルグマン空間について様々な研究がなされてきた。調和関数からなるベルグマン空間をさらに一般化して捉えなおしたものが放物型ベルグマン空間であるといえる。これらと同様に、放物型ハーディー空間も導入された。本研究においては、特に2重放物型調和ベルグマン空間における $p=1$ のときの双対空間の特徴付けの研究を行い、双対空間とその関係を明らかにした。これらの結果は、未知であった2重放物型調和ベルグマン空間（ $p=1$ ）の双対空間の研究の端緒となることが予想される。

研究成果の概要（英文）：We study properties of parabolic Hardy and Bergman spaces. We studied conjugate functions of parabolic Bergman spaces. We consider the  $L\{ \}$ -harmonic extensions of  $L\{2\}$ -functions on the Euclidean space. In particular, we study Littlewood-Paley and Lusin functions for  $L\{ \}$ -harmonic extensions, and we give some identities concerning  $L\{2\}$ -norms of thier functions. Moreover, we consider function spaces which consist of two parabolic Bloch spaces, and investigate the reproducing formula on these spaces.

研究分野：関数解析学

キーワード：放物型ハーディー空間 放物型ブロック空間 双対空間

## 様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

近年、ユークリッド空間  $R^{n+1}$  の上半空間において定義された放物型ベルグマン空間という新しい関数空間が導入され、放物型ベルグマン空間について様々な研究がなされてきた。まず、それらの経緯について簡単に述べる。 $0 < p < \infty$  とする。放物型方程式  $L^p u = 0$  の解  $u$  を  $L^p$ -調和関数と呼ぶ。放物型ベルグマン空間とは、 $L^p$ -調和で、かつ上半空間において  $p$ -乗可積分な関数  $u$  からなる空間のことをいう。特に、 $p = 1/2$  のときに調和関数からなるベルグマン空間に一致する。 $p = 1/2$  のときは特殊な場合であり、有用な性質が数多くあって研究しやすい。放物型方程式  $L^p u = 0$  は、 $0 < p < \infty$  について扱われるので、調和関数からなるベルグマン空間をさらに一般化して捉えなおしたものが放物型ベルグマン空間であるといえる。これまで、申請者は放物型ベルグマン空間について研究を行い、幾つかの結果を得てきた。また、それらの蓄積を活かし、放物型ハーディー空間について研究を行い、幾つかの結果を得てきた。以上がこれまでの経緯である。

以上を踏まえ、本研究の目的について述べる。本研究の目的は、 $R^{n+1}$  の上半空間において定義された放物型ハーディー空間について様々な方面から、さらなる解析を行い、その空間の性質をより明らかにすることであり、これらによって明らかになった放物型ハーディー空間の性質をもとに、その空間上で定義される作用素の解析についても行うことである。

まず、放物型ハーディー空間の定義について述べる。放物型ハーディー空間とは、 $L^p$ -調和で、かつ

$$\sup_{t>0} \int |u(x,t)|^p dx < \infty$$

を満たす関数  $u$  からなる空間のことである。ここで  $x$  は  $R^n$  の要素、 $t$  は  $R$  の要素を表す。これまで、放物型ベルグマン空間については様々な研究がなされてきたが、放物型ハーディー空間については、ほとんど研究がなされていなかった。放物型ハーディー空間についても、 $p = 1/2$  のときに調和関数からなるハーディー空間に一致することが知られている。調和関数からなるハーディー空間についての研究は、C. Fefferman や E.M. Stein らによる非常に有名な結果がある。また、放物型ハーディー空間については、申請者による部分的な結果がある。申請者は、これまでの放物型ベルグマン空間や放物型ハーディー空間に関する研究を参考に、放物型ハーディー空間について、さらなる解析を試みるつもりであった。

また、放物型ハーディー空間の解析を行うために、放物型 BMO 空間の研究を行い、BMO 空間と深く関連する B. Muckenhoupt の  $(A_p)$ -条件を放物型へ一般化することを試みる。これらをもとに、放物型ハーディー空間上で定義される作用素の解析も行うつもりであった。

### 2. 研究の目的

本研究の「問い」は、以下の三つである。

#### 放物型共役関数の解析

調和関数からなるハーディー空間で重要な研究対象となったのは、共役調和関数の性質であり、C. Fefferman の研究が非常に良く知られている。特に、 $p = 1$  のときの放物型ハーディー空間の解析は難しいであろうことが予想される。この解析は、調和関数からなるハーディー空間においても大変難しい部分があり、 $p = 1$  のときの双対空間の研究結果として BMO 空間が考え出された。申請者は、これまでの研究で放物型ベルグマン空間における共役調和関数について、その概念を考察した上で様々な一般化を行い、それらについて研究結果を残した。その結果は、放物型ベルグマン空間における共役調和関数は、 $p = 1$  のときも  $1 < p < \infty$  のときと同様に一般化が行えるというものであった。本研究課題の一つ目の学術的な問いは、放物型ハーディー空間においても、共役調和関数は  $p = 1$  及び  $1 < p < \infty$  の場合を統合した形で一般化が行えるのではないかと問うものである。

#### 放物型 BMO 空間の解析と B. Muckenhoupt の $(A_p)$ -条件

上記の共役調和関数の研究に関連して、BMO 空間の概念が必要となってくることが予想される。BMO 空間は、 $p = 1$  のときの調和関数からなるハーディー空間の双対空間となることが C. Fefferman の研究で示され、さらに BMO 空間が B. Muckenhoupt の  $(A_p)$ -条件とも密接に関連していることが示された。本研究課題の二つ目の学術的な問いは、調和関数からなる BMO 空間や  $(A_p)$ -条件を放物型 BMO 空間や放物型  $(A_p)$ -条件へと一般化する場合は、どのように定義するのが自然なのか？ さらには放物型 BMO 空間と放物型  $(A_p)$ -条件には、どのような関連性があるのか？ というものである。

#### 放物型ハーディー空間上の作用素の研究

申請者は、上記の研究を行った後、放物型ハーディー空間上でトエプリッツ作用素やハンケル作用素を定義し、それらに関する研究を行う予定であった。本研究課題の三つ目の学術的な問いは、これらの作用素の有界性、可逆性、コンパクト性は、どんな条件によって特徴付けられるのか？ というものである。

最後に、本研究の目的および学術的意義等について述べる。本研究では、調和関数のときの結果を、放物型方程式  $L^p u = 0$  における  $p = 1/2$  のときに得られた結果と捉えなおし、それを  $0 < p < \infty$  まで一般化する。このとき、調和関数の持つ様々な有用な性質(平均値の性質や

ポアソン積分の性質等々)が使えない。特に、局所的な性質はほとんど使うことが出来ない。このため、放物型ハーディー空間を解析するには、これまでと大きく異なった見方や解析方法が必要となる。よって本研究は、これまでの関数空間に対する研究手法を発展させ、より深化させる先駆けとなると考えている。また、調和関数からなるベルグマン空間やハーディー空間において認識できなかった結果を、浮き上がらせるものになるであろうとも思われる。また、放物型 BMO 空間や放物型  $(A_p)$ -条件の概念を明らかにし、新たな研究分野を開拓するものとなる。

### 3. 研究の方法

放物型ハーディー空間の性質の研究については、研究対象としたい問題について、予想される結果や意義、さらにそれらを用いた発展などについて、これまでのベルグマン空間に関する研究を参考に綿密な精査を行った。その上で、以下のような方法で研究を行った。 $L^p$ -調和な拡張関数と放物型極大関数との関連性、及びハーディー・リトルウッド型の極大関数との関連性を調べ、ファトゥー型の境界極限存在定理などについての研究へとつなげた。さらに、2重放物型調和ベルグマン空間 ( $p=1$ ) の双対空間の研究を行い、2重放物型ブロック空間との関連性について研究を行った。

### 4. 研究成果

ここでは、境界関数を上半空間へ放物型調和拡張を行った Littlewood-Paley 型や、Lusin 型関数の性質について研究を行った。また、2重放物型調和ベルグマン空間における  $p=1$  のときの双対空間の特徴付けの研究を行い、双対空間とその関係を明らかにした。これらの結果は、未知であった 2重放物型調和ベルグマン空間 ( $p=1$ ) の双対空間の研究の端緒となることが予想される。また、2重放物型調和ベルグマン空間 ( $p=1$ ) の双対空間と 2重放物型ブロック空間との関連性について明らかにした。これらの結果は、既に出版済みのものと、投稿中のものがある。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Y. Hishikawa, M. Nishio and M. Yamada	4. 巻 70
2. 論文標題 A system of conjugate functions on parabolic Bloch spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 1085--1102
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y. Hishikawa and M. Yamada	4. 巻 42
2. 論文標題 Littlewood-Paley and Lusin functions of ( )-parabolic type	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Sci. Rep. Fac. Educ. Gifu Univ.	6. 最初と最後の頁 1-8
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y. Hishikawa and M. Yamada	4. 巻 41
2. 論文標題 Boundary behavior of L( )-harmonic extensions of measures	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Sci. Rep. Fac. Educ. Gifu Univ.	6. 最初と最後の頁 31-37
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 0件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 菱川洋介
2. 発表標題 The theory of reproducing kernels on Segal-Bargmann (Fock) spaces
3. 学会等名 平成30年度 名古屋若手セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 菱川洋介
2. 発表標題 The reproducing formula on bipolarabolic Bloch spaces
3. 学会等名 名城大学ポテンシャル論セミナー
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----