

令和 2 年 5 月 21 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05202

研究課題名(和文) タイヒミュラー空間の複素解析的構造の研究

研究課題名(英文) Research on complex analytical structure on Teichmuller space

研究代表者

宮地 秀樹 (Miyachi, Hideki)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：40385480

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：この研究では、リーマン面(曲面上の複素多様体の構造)の変形空間であるタイヒミュラー空間の複素構造の研究を行っている。リーマン面(代数曲線)の正則族は複素幾何学、代数幾何学などで重要な研究対象であり、我々の研究は正則族にかかる正則不変量の俯瞰的な研究であると認識される。リーマン面の退化を用いた理想境界を通して、正則関数の境界挙動(境界値)が定式化され、正則関数のポアソン積分表示などが定式化される。

研究成果の学術的意義や社会的意義

リーマン面の複素解析的変形の空間であるタイヒミュラー空間について研究している。この空間はほとんど全ての曲面の変形を記述する基礎的な空間であり、弦理論など物理の研究にも応用されている。正則族の理解には、族の正則的に依存する不変量が重要である。本研究ではそのような不変量を、空間の関数として認識して研究する。正則関数の理想境界における境界値を用いて、この研究における基本公式であるポアソン積分表示を得た。

研究成果の概要(英文)：In this research, we study the complex analytical structure on Teichmuller space. Under the complex structure, Teichmuller space is the universal space of holomorphic families of Riemann surfaces. Holomorphic families of Riemann surface are important mathematical objects, for instance, in Complex geometry and Algebraic geometry. Holomorphic functions on Teichmuller space are thought of as holomorphic invariants for holomorphic families of Riemann surface. This research is recognized as a comprehensive investigation on holomorphic functions. The boundary values are formulated on ideal boundaries (i.e. the set of degenerations of Riemann surfaces), and we can state the Poisson integral formula for holomorphic functions (pluriharmonic functions) on Teichmuller space.

研究分野：複素解析学

キーワード：タイヒミュラー空間 リーマン面 双曲幾何学 多重ポテンシャル論 ポアソン積分 多重グリーン関数 擬等角写像

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

## 1. 研究開始当初の背景

リーマン面の正則族の普遍空間であるタイヒミュラー空間の複素構造は歴史的には、小平-スペンサー理論およびアールフォース-ベアス理論を用いて無限小変形(変形空間の接空間)が定式化され、アールフォースにより周期行列を用いて複素局所座標が得られ、そしてベアスにより複素ユークリッド空間上の有界正則領域として実現された。それ以降、主に、擬等角写像論とサーストンの3次元多様体の分類プログラムにおける双曲多様体の研究におけるクライン群論と関連してタイヒミュラー空間論は研究され発展した。タイヒミュラー空間はほとんど全ての曲面の変形を表現する空間であるような基礎的な空間であるため、例えば弦理論などの物理学のように他分野に応用があり、さらに数学においても位相幾何、複素幾何、微分幾何、代数幾何などの分野とも関連が深い。しかしながら、複素解析的構造の研究に関しては、タイヒミュラー空間論の創成期以降の進展以降は研究の進展はなく、有界領域としては多項式凸性が最良の結果であった。

正則族の普遍空間であることから、タイヒミュラー空間の複素構造および空間上の正則関数は、正則族の正則依存不変量の研究、そして有界領域として性質を理解するために重要な研究対象であることは明白であり、今後の進展のためにも、新しい視点からの研究が望まれていたと考えられる。

## 2. 研究の目的

本研究は、有界領域としてタイヒミュラー空間を複素解析的視点から研究する。そして、その先には、タイヒミュラー空間の無限遠境界(ベアス境界)の構造を解明して、それらの外在的性質(埋め込みの像の性質という意味で外在的)からタイヒミュラー空間自身の内在的な性質の関係を理解して、タイヒミュラー空間論およびその関連分野の相互的發展を目標としている。

## 3. 研究の方法

有界領域として、つまり複素解析的な外在的性質を知るためには、多変数関数論および多重ポテンシャル論において定義されているような基本的な関数をモジュライの視点から研究する必要がある。本研究では、それらの基本関数のうち多重グリーン関数を考え、それを用いて多重ポテンシャル論を展開する手法をとる。

Krushkal により、多重グリーン関数がタイヒミュラー距離を用いて表す公式が示されている。タイヒミュラー距離は小林距離であるため、Krushkal の公式はタイヒミュラー距離の幾何、つまり極値的長さをを用いた幾何学と複素解析的視点の研究との関係を示唆するものである。一方で、すでに、極値的長さをを用いた幾何学は、単純閉曲線上の交点数の幾何学である交点数の関数を用いて位相幾何学的視点(サーストン理論)に内包されているため、多重グリーン関数と Krushkal の公式を通して、位相幾何学的視点(理想境界の幾何)と複素解析的視点の関係が解明され、そして内在的性質と外在的性質の関係が得られることを期待する。

また、Demailly により多重グリーン関数を用いた多重調和測度の特徴付けと境界値のポアソン積分表示を用いて、タイヒミュラー空間の理想境界の関数を用いたタイヒミュラー空間上の正則関数の研究を行い正則関数の性質について解明する。

## 4. 研究成果

ベアス境界の点を表すクライン群の終層と関係して交点数の零集合を用いたコンパクト化(閉化)について研究した([8])。タイヒミュラー距離のグロモフ積は交点数として取り扱うことができるため、(タイヒミュラー空間はグロモフ双曲的ではないが)グロモフ境界の研究を真似てタイヒミュラー空間のタイヒミュラー距離空間として構造を研究した([4],[7])。

極値的長さはタイヒミュラー空間の点と測度付き測地線層の2変数関数と考えることができる。極値的長さの測度付き測地線層に関する微分公式を位相幾何学的視点(組み合わせ的視点)からの研究を行った([6])。論文[5]において、極値的長さの関数をタイヒミュラー空間上の関数としてのレビ形式を具体的に計算することにより、その逆数が多重優調和関数であることを示し、極値的長さの幾何学と多重ポテンシャル論との関連することを示した。多重グリーン関数を、タイヒミュラー距離を用いて表示する Krushkal の公式の別証明を得た([1])。また、Krushkal の公式を用いて Demailly の意味の多重調和測度とポアソン核をモジュライと位相幾何学的な視点からの特徴付けを得た。そして正則関数(多重調和関数)の境界挙動についての Schwarz の定理をタイヒミュラー空間に対して定式化した。この結果は現在投稿中である([9])。

無限次元のタイヒミュラー理論について研究した。特に[2]ではタイヒミュラー距離の複素測地線であるタイヒミュラー円板の境界挙動を普遍タイヒミュラー空間において調べた。また、擬等角写像の無限小空間の構造を力学系的な視点から研究した([3])。

## 研究課題期間中に公表された研究論文のリスト

1. Hideki Miyachi. Pluripotential theory on Teichmüller space I: Pluricomplex Green function. *Conform. Geom. Dyn.* 23 (2019), 221-250, 23:221--250, 2019.
2. Hideki Miyachi and Dragomir Šarić. Convergence of teichmüller deformations in the universal Teichmüller space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 147(11):4877--4889, 2019.
3. Hideki Miyachi. A dynamical approach to the infinitesimal spaces of quasiconformal mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 147(1):215--227, 2019.
4. Hideki Miyachi. Action at infinity of quasi-isometries on Teichmüller space and the geometry of the Gromov product. In *Handbook of group actions. Vol. III, volume 40 of Adv. Lect. Math. (ALM)*, pages 3--12. Int. Press, Somerville, MA, 2018.
5. Hideki Miyachi. Extremal length functions are log-plurisubharmonic. In *In the tradition of Ahlfors-Bers. VII, volume 696 of Contemp. Math.*, pages 225--250. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.
6. Hideki Miyachi and Ken'ichi Ohshika. Une formule différentielle de la longueur extrémale et ses applications. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 24(1):115--133, 2017.
7. Hideki Miyachi. Geometry of the Gromov product: geometry at infinity of Teichmüller space. *J. Math. Soc. Japan*, 69(3):995--1049, 2017.
8. Vincent Alberge, Hideki Miyachi, and Ken'ichi Ohshika. Null-set compactifications of Teichmüller spaces. In *Handbook of Teichmüller theory. Vol. VI, volume 27 of IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 71--94. Eur. Math. Soc., Zürich, 2016.

## プレプリント

9. Hideki Miyachi, Pluripotential theory on Teichmüller space II - Poisson integral formula -, submitted (ArXiv: <https://arxiv.org/abs/1810.04343>)

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Miyachi Hideki	4. 巻 23
2. 論文標題 Pluripotential theory on Teichmüller space I: Pluricomplex Green function	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Conformal Geometry and Dynamics of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 221 ~ 250
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1090/ecgd/340">https://doi.org/10.1090/ecgd/340</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Miyachi Hideki, Saric Dragomir	4. 巻 147
2. 論文標題 Convergence of Teichmüller deformations in the universal Teichmüller space	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 4877 ~ 4889
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1090/proc/14598">https://doi.org/10.1090/proc/14598</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Miyachi Hideki	4. 巻 147
2. 論文標題 A dynamical approach to the infinitesimal spaces of quasiconformal mappings	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 215 ~ 227
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1090/proc/14243">https://doi.org/10.1090/proc/14243</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hideki Miyachi	4. 巻 40
2. 論文標題 Action at Infinity of Quasi-isometries on Teichmüller Space and the Geometry of the Gromov Product	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Handbook of Group Actions, Volume III, Advanced Lectures in Mathematics	6. 最初と最後の頁 3 ~ 12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hideki Miyachi	4. 巻 69
2. 論文標題 Geometry of the Gromov product: Geometry at infinity of Teichmuller space	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 995 ~ 1049
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/06930995	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Miyachi Hideki	4. 巻 24
2. 論文標題 Extremal length functions are log-plurisubharmonic	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 225 ~ 250
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/696/14024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Miyachi Hideki, Ohshika Ken'ichi	4. 巻 24
2. 論文標題 Une formule differentielle de la longueur extremale et ses applications	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Annales Mathematiques Blaise Pascal	6. 最初と最後の頁 115 ~ 133
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/ambp.366	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Alberge Vincent, Miyachi Hideki, Ohshika Ken'ichi	4. 巻 VI
2. 論文標題 Null-set compactifications of Teichmuller spaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Handbook of Teichmuller theory	6. 最初と最後の頁 71 ~ 94
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/161-1/4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計18件(うち招待講演 18件/うち国際学会 13件)

1. 発表者名 宮地秀樹
2. 発表標題 タイヒミュラー空間の測地線の振る舞いについて
3. 学会等名 函数論シンポジウム(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hideki Miyachi
2. 発表標題 Towards Complex analysis on Teichmüller space
3. 学会等名 International Conference on Complex Analysis 2019(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hideki Miyachi
2. 発表標題 Complex Analysis on Teichmüller space
3. 学会等名 HAYAMA Symposium on Complex Analysis in Several Variables XXI(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hideki Miyachi
2. 発表標題 Poisson integral formula for Teichmüller space
3. 学会等名 Riemann surfaces and Teichmüller theory(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hideki Miyachi
2. 発表標題 Toward Complex analysis on Teichmüller space
3. 学会等名 Workshop on Holomorphic Maps, Pluripotentials and Complex Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hideki Miyachi
2. 発表標題 Poisson integral formula for Teichmüller space
3. 学会等名 2018年度「リーマン面・不連続群論」研究集会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hideki Miyachi
2. 発表標題 Toward Complex analysis on Teichmüller space
3. 学会等名 RIMS 共同研究(公開型)『複素力学系研究とその発展』(Complex dynamical systems and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hideki Miyachi
2. 発表標題 Toward Complex analysis with Thurston's theory
3. 学会等名 New Trends in Teichmüller Theory and Mapping Class Groups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hideki Miyachi
2. 発表標題 Teichmuller theory and shear coordinates
3. 学会等名 研究会「モジュライ空間のシンプレクティック幾何」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 宮地秀樹
2. 発表標題 Toward complex analysis on Teichmuller space
3. 学会等名 日本数学会2017 年度年会, 幾何学学科会(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 宮地秀樹
2. 発表標題 Toward complex analysis on Teichmuller space
3. 学会等名 2017年度多変数関数論冬セミナー(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 宮地秀樹
2. 発表標題 Deformation of Riemann surfaces via affine deformations
3. 学会等名 モジュライ空間の幾何学と可積分系(招待講演)
4. 発表年 2017年



1. 発表者名 宮地秀樹
2. 発表標題 タイヒミュラー空間論の位相幾何学的側面と複素解析的側面の一意化に向けて
3. 学会等名 第64回トポロジーシンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hideki Miyachi
2. 発表標題 Towards complex analysis on Teichmüller space with Thurston's theory
3. 学会等名 Geometry and physics, Dedicated to the memory of W.P.Thurston(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hideki Miyachi
2. 発表標題 Deformation of singular flat structures from quadratic differentials and Riemann surfaces
3. 学会等名 "Special Session on Geometric Function Theory and Related topics" (SS 19 A), AMS Meeting #1129(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hideki Miyachi
2. 発表標題 Levi forms of extremal length functions and the period matrices of ramified double coverings
3. 学会等名 Workshop on Grothendieck-Teichmüller Theories(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 宮地秀樹
2. 発表標題 極值的長さの幾何学, 位相幾何学と複素解析学
3. 学会等名 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hideki Miyachi
2. 発表標題 Extremal length geometry on Teichmüller space
3. 学会等名 symposium on Differential Geometry/Teichmüller theory (in cooperation with American Mathematical Society, International Conference of The Indian Mathematics)(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<a href="http://hidekimyc.html.xdomain.jp/index.html">http://hidekimyc.html.xdomain.jp/index.html</a>
---

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考