

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 4 年 6 月 9 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2021

課題番号：16K05210

研究課題名(和文) くりこみ群によるフラクタル上の非マルコフ過程の解析

研究課題名(英文) Renormalization group approach to non-Markov processes on fractals

研究代表者

服部 久美子 (Hattori, Kumiko)

東京都立大学・理学研究科・教授

研究者番号：80231520

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：服部、水野が考案した「スケールの大きい順にループを消す方法」を、プレ・シェルピンスキー・ガスケット上のパラメータを含む自己反発・吸引ウォークの族に適用して、自己回避的なウォークの族を構成し、その連続極限の存在を証明し、時刻0付近の漸近的振舞い、重複対数の法則などの見本関数の性質を得た。これは有限なグラフ上の確率過程であったが、無限プレ・シェルピンスキー・ガスケット上の無限の長さをもつループ・イレースド・ランダムウォークを構成しその漸近的性質を示した。さらに、ランダム・枝分かれコッホ曲線上のループ・イレースド・ウォークを構成し、連続極限の存在を示し、極限の過程が自己回避的であることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

確率過程論の分野で、マルコフ過程に関しては多くの研究結果の蓄積があり、ほかの解析学の分野との関係もよく知られている。一方、未来の行動が現在の位置だけでなく過去の履歴に依存する非マルコフ過程に関する研究は、マルコフ過程に比べてはるかに少ない。例えば、次元の低い(過去の履歴が強く影響する)ユークリッド空間上の自己回避過程に関する厳密な結果はわずかしか知られていない。フラクタルは、自己相似性をもつために、次元が低いが、厳密な結果が得られる可能性がある。これは逆にユークリッド空間上の非マルコフ過程に関する洞察を与えると期待される。

研究成果の概要(英文)：Hattori and Mizuno have invented the "erasing-larger-loops-first"(ELLF) method to construct a loop-erased random walk on the pre-Sierpinski gasket(SG). Hattori, Ogo and Otsuka applied this method to a family of self-repelling walks on the pre-SG, proved that the resulted walks have scaling limits and obtained some properties of the limit process. Hattori constructed a loop-erased random walk on the infinite pre-SG, obtained its exponent for the mean square displacement and proved a law of iterated logarithms. Hattori, Kurosawa, Nisijima constructed a loop-erased random walk on the random pre-branched Koch curve and proved the existence of the scaling limit, which turns out to be self-avoiding.

研究分野：確率論

キーワード：フラクタル ループ・イレースド・ランダムウォーク 自己反発ウォーク 連続極限 平均変位の指数 時刻0付近の振舞い 重複対数の法則 ランダムフラクタル

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

非マルコフ過程の典型例として、一度訪れた点には戻れない自己回避ウォークがある。隣の点を等確率で選んで移る単純ランダムウォークの未来の振舞いは、現在の位置のみに依存する（マルコフ性）。一方、自己回避ウォークは過去の履歴に依存する（非マルコフ性）。このことが解析を決定的に難しくする。特に、ユークリッド格子  $\mathbb{Z}^d$  上の自己回避ウォークは、 $d = 2, 3$  などの低次元では自己回避の効果が強く働くため、得られている厳密な結果は僅かである。そこで、低次元でありながら、自己相似性を利用することにより厳密な結果が得られる可能性のあるフラクタル上の非マルコフ過程を扱ってきた。

くりこみ群の方法により、プレ・シェルピンスキー・ガスケット（シェルピンスキー・ガスケットを離散化したグラフ）上の自己回避ウォークの漸近的性質、および連続極限に関して、楠岡成雄、服部哲弥と共同研究を行ってきた。

一方で、ループ・イレーズド・ランダムウォークという、上述の自己回避ウォークとは異なる非マルコフ的ウォークの研究を行ってきた。自己回避ウォークは歩数  $n$  を固定するごとに、等確率を与えて定義したものだが、ループ・イレーズド・ランダムウォークは単純ランダムウォークからできた順にループを消して得られる、自己回避ウォークとは分布の異なる非マルコフ過程である。「できた順のループの消去」をそのまま扱おうとすると困難である。一般に、ループ・イレーズド・ランダムウォークは、一様全域木を用いる方法で研究されてきた。服部は、指導する大学院生の水野径明とともに、フラクタルと相性のよい別の構成法を開発し、それによって構成したプレ・シェルピンスキーガスケット上のループ・イレーズド・ランダムウォークは、従来のループ・イレーズド・ランダムウォークと同値であること、および連続極限（グラフの一辺の長さを 0 に近づけた極限）の存在とその性質を示した。これと独立に、一様全域木を用いる方法で、Shinoda, Teufl, Wagner が同様の結果を得ている。

## 2. 研究の目的

低次元でありながら、自己相似性をもつことから、くりこみ群の方法で厳密な結果が得られる可能性のあるフラクタル上の非マルコフ過程に関しては、これまでなされてきた研究のほとんどに服部が関与している。この分野でできるだけ多くの結果を得て、非マルコフ過程の分野に貢献することが目的である。

## 3. 研究の方法

ループ・イレーズド・ランダムウォークは、自己回避的な非マルコフ的ウォークであるが、単純ランダムウォークをもとにして構成されるので、自己回避ウォークよりも扱いやすく、ユークリッド格子  $\mathbb{Z}^d$  上で、盛んに研究されている。有限プレ・シェルピンスキー・ガスケットとよばれるフラクタルグラフ上で、ループをできた順ではなく、スケールの大きい順に消しても、同じループ・イレーズド・ウォークが得られることを、服部と水野径明はすでに証明していた。

この方法は、自己相似性をもつフラクタルと相性がよく、研究を容易にする。それだけでなく、一様全域木を用いる方法は単純ランダムウォークからループを消す場合にしか使えないが、スケールの大きい順にループを消す方法は、単純ランダムウォーク以外にも適用できる。この方法によって、(1) シェルピンスキー・ガスケット上の自己反発・吸引ウォー

クの族に基づく自己回避的なウォークの族を構成した。(2) 無限プレ・シェルピンスキー・ガスケツト上の、無限の長さをもつループ・イレズド・ランダムウォークを構成し漸近的性質を調べた。(3) フラクタル自体にランダム性をもたせた、ランダム・枝分かれコッホ曲線上の単純ランダムウォークからループ・イレズド・ウォークを構成して、その性質を調べた。

#### 4. 研究成果

(1) プレ・シェルピンスキー・ガスケツト上の、ループ・イレズド・ランダムウォークと、自己回避ウォークを、パラメータに関して連続につなぐウォークの構成 これまでに、Hamblly, 服部哲弥とともに、プレ・シェルピンスキー・ガスケツト上で、単純ランダムウォークと自己回避ウォークを一つのパラメータ  $u$  で連続的に結ぶ自己反発ウォークの族を構成し、その性質に関する結果を得ていた。今回は、大学院生の大胡範晃、大塚隆史とともにスケールの大きい順にループを消す方法をこのウォークの族に対して適用し、パラメータ  $0 \leq u \leq 1$  入りの自己回避的なウォークの族を構成し、その連続極限の存在と、極限の確率過程の性質を調べた。極限の確率過程は、 $u = 1$  では単純ランダムウォークからループを消した普通のループ・イレズド・ランダムウォークの連続極限と一致し、 $u = 0$  では自己回避ウォークの連続極限と一致する。得られた連続な確率過程は、自己回避的であり、軌跡のハウスドルフ次元は真に 1 より大きい（無限に細かいぎざぎざをもちながらも、自己交差はないことを意味する）ことを証明した。さらに、時刻が 0 に近いところでの漸近的振舞いを表す指数  $\nu$  の値を求め、重複対数の法則が成り立つことも証明した。パラメータ  $u$  は 1 以上の値にしても（自己吸引過程に対応）同様の結果が得られる。特に、 $u \rightarrow \infty$  の極限がどのような確率過程になるかも数値計算により調べた。

(2) 無限プレ・シェルピンスキーガスケツト上の無限の長さをもつループ・イレズド・ランダムウォークの構成とその漸近的性質

無限に広がるプレ・シェルピンスキーガスケツト上の単純ランダムウォークは再帰性をもつため、無限の長さをもつループ・イレズド・ランダムウォークを構成するには工夫が必要である。服部は、各スケールの有限プレ・シェルピンスキーガスケツト上のループ・イレズド・ランダムウォークに対して、コルモゴロフの拡張定理を適用して、無限の長さまで拡張した。スケールの大きい順にループを消す方法を用いて構成すると、スケール方向のマルコフ性が見えてきてこれが拡張のための鍵となった。構成した無限プレ・シェルピンスキー・ガスケツト上のループ・イレズド・ランダムウォークの歩数を大きくしていったときの漸近的振舞いに関する結果を得た。平均 2 乗変位の指数は、連続極限で時刻 0 付近での振舞いを支配する指数と一致することを証明し、重複対数の法則が成り立つことを示した。

(3) ランダム枝分かれコッホ曲線上の、ループ・イレズド・ランダムウォークの連続極限の存在とその極限過程の自己回避性

大学院生の黒澤哲生、西島駿介との共同研究で、フラクタル自体をランダム化し、その上でのループ・イレズド・ランダムウォークを構成した。具体的には、まず、ランダム・プレ・枝分かれコッホ曲線を構成し、これは開集合条件を満たすフラクタルであることを

証明した。次に，その上でのランダム・ウォークと，スケールの大きい順にループを消す方法によるループ・イレーズド・ランダムウォークを構成した。連続極限の存在と，極限の過程の軌跡が自己回避的であることを証明した。ここまででも，ランダム・フラクタル上の非マルコフ過程に関する初めての研究という意義があり，黒澤哲生が2022年3月の日本数学会で発表した。論文として発表するにはさらに極限過程の何らかの性質を加えたい。ランダム性の影響で，連続極限の時刻0付近での振舞いでさえ求めるのは非常に困難であるが，現在取り組んでいる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kumiko Hattori	4. 巻 120
2. 論文標題 Displacement exponent for loop-erased random walk on the Sierpinski gasket	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Stochastic processes and their applications	6. 最初と最後の頁 4239--4268
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.spa.2018.11.021	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Hattori, N. Ogo and T. Otsuka	4. 巻 10
2. 論文標題 A family of self-avoiding random walks interpolating the loop-erased random walk and a self-avoiding walk on the Sierpinski gasket	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S	6. 最初と最後の頁 289--311
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcdss.2017014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Kumiko Hattori
2. 発表標題 Displacement exponents for the loop-erased random walk on the Sierpinski gaskets
3. 学会等名 Fractal Geometry and Stochastics 6（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 服部久美子
2. 発表標題 Displacement exponent for loop-erased random walk on the Sierpinski gasket
3. 学会等名 SPA2017（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 服部久美子
2. 発表標題 Displacement exponents for loop-erased random walk on the Sierpinski gaskets
3. 学会等名 岡山-広島 解析・確率論セミナー2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 大塚隆史
2. 発表標題 シェルピンスキー・ガスケット上の自己回避過程の族のくりこみ群の方法を用いた解析
3. 学会等名 東京確率論セミナー
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 服部久美子
2. 発表標題 A family of self-avoiding processes on a fractal
3. 学会等名 Applied Probability Workshop (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 大塚隆史
2. 発表標題 A family of self-avoiding random walks interpolating the loop-erased random walk and the self-avoiding walk on the Sierpinski gasket
3. 学会等名 SEAMS School 2016: Topics in Stochastic Analysis (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 黒澤哲生
2. 発表標題 ランダム枝分かれコッホ曲線上でのLoop消しランダムウォーク
3. 学会等名 日本数学会（国際学会）
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関