

令和 5 年 5 月 26 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2022

課題番号：16K05211

研究課題名(和文) 非可換調和解析における多次元特異積分論の構築—実解析と表現論を融合した新たな手法

研究課題名(英文) Construction of multi-dimensional singular integral theory in non-commutative harmonic analysis - A new method combining real analysis and representation theory

研究代表者

河添 健 (KAWAZOE, Takeshi)

慶應義塾大学・総合政策学部(藤沢)・名誉教授

研究者番号：90152959

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的はヤコビ解析において用いた手法を精査すると共に、それを多変数へ、とくに高ランクな半単純リー群上の解析に拡張することであった。アーベル逆変換をユークリッド空間上の分数微分作用素で表記する手法により、ヤコビ解析とユークリッド空間での調和解析との関係がより明確になった。これにより従来から知られていた実ランク1の半単純リー群上の特異積分論を改善することができた。また多変数化に関しては具体的な $SU(n,m)$ を例にとり、畳み込み作用素に見られるKunze-Stein現象の端点評価を得ることができた。高ランクの場合の最初の結果である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ユークリッド空間上の調和解析を半単純リー群上に拡張する研究は、調和解析の主分野となっている。フーリエ解析の類型までは完成しているが、一般の特異積分論となると実ランク1な半単純リー群およびその拡張であるヤコビ解析の場合を除くと、結果に乏しい。今回の逆アーベル変換をユークリッド空間の分数微分作用素で表す手法により、例ではあるが $SU(n,m)$ (ランク n)の場合に結果が得られたことは意義がある。とくに上記手法の有効性を確かめることができた。計算には $SU(n,m)$ の具体的な構造を用いているので、今後はこの性質を一般の高ランクな半単純リー群に拡張したい。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research was to examine the method used in the Jacobi analysis and to extend it to multivariate analysis, especially on semisimple Lie groups with higher rank. By rewriting the inverse Abel transform in terms of a Euclidean fractional differential operator, the relationship between the Jacobi analysis and the harmonic analysis on Euclidean space has been more clarified. This improves the singular integral theory on real rank-1 semisimple Lie groups. As for multi-variable cases, we investigated the case of $SU(n,m)$ as an example, and obtained the end-point estimate of the Kunze-Stein phenomenon related to convolution operators. This was the first result for the higher rank case.

研究分野：調和解析

キーワード：非可換調和解析 ヤコビ解析 特異積分論 半単純リー群 アーベル変換 分数作用素 畳み込み作用素

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

Fourier 解析の拡張としての調和解析は近年、新たな局面を迎えている。リー群上の表現論を用いた非可換調和解析から、さらに代数的なルート系に付随する微分・差分作用素の固有関数を用いた調和解析へと発展しており、Dunkl 変換、Heckman-Opdam 変換、Cherednik 変換などが研究されている。研究の方向としては、Fourier 解析の類型として、Plancherel 公式、Schwartz 空間の特徴付け、最大関数の有界性などが対象となる。しかし多変数の場合などにおいては、固有関数の具体形に関する情報が不足しており、Littlewood-Paley 関数・面積関数などの特異積分の有界性に関する理論の構築には限界がある。対象が一般化されるに従って十分な成果が得られていないのが現状である。その回避として筆者はヤコビ解析において逆 Abel 変換をユークリッド空間の分数微分作用で表し、それによりヤコビ解析とユークリッド空間上の解析を関係付ける手法を用いて来た。これにより実ハーディ空間などをヤコビ解析において構築してきた。この手法を、Cherednik 解析などに拡張することを試み、多変数調和解析や新たな特異積分論を構築することが可能となる。

2. 研究の目的

本研究の目的はユークリッド空間上の調和解析を Cherednik 変換まで拡張し、新たな多変数の特異積分論を構築することである。多くの困難が予想されるが、筆者がヤコビ解析で用いた逆 Abel 変換を分数微分作用素で表す方法を多変数に拡張することにより、実ハーディ空間の構成や各種の特異積分理論が新たな空間上で得られるものと期待される。とくに表現論への応用や畳み込み作用素に現れる特異な現象—Kunze-Stein 現象などについても探る。より具体的に述べれば、ユークリッド空間あるいはヤコビ解析において得られた諸結果：(a) Abel 変換と逆 Abel 変換、(b) Riesz 変換の理論、(c) Calderon-Zygmund 作用素の理論とその L_p および H^1 有界性、(d) Bourgain 不等式、(e) BMO と H^1 の関係の構築、(f) 群上の調和解析への応用、などを Dunkl 変換、Heckman-Opdam 変換、Cherednik 変換などに拡張することである。これらの過程でポイントとなることは、一変数の解析から多変数の解析への拡張および重み関数が指数増大度を持つ空間への拡張である。研究成果の少ない分野なので、研究方針や手法の正当性を常に評価する。

3. 研究の方法

本研究の目的は特異積分論を Dunkl 変換、Heckman-Opdam 変換、Cherednik 変換などへ拡張することである。空間の特性を調べる研究と特異積分の性質を調べる研究が交差している。したがって方法としては、1 変数の特異積分論、例えばヤコビ解析を精査することと、それらを多変数の特異積分論、たとえば高ランクな半単純リー群上の特異積分論に拡張するこ

ととした。流れとしては、筆者がヤコビ解析において Littlewood-Paley 関数・面積関数などの特異積分の L_p および H^1 評価を得たときの手法を、より一般化された空間で用いて、Calderon-Zygmund 作用素の有界性を求めることとした。具体的にはヤコビ解析のときに構築した逆 Abel 変換公式を、一次元の Dunkl 変換、Heckman - Opdam 変換、Cherednik 変換から多次元の変換へ順次拡張することを試みた。ここで各変換はラプラシアン固有関数で定義され、ユークリッド空間の固有関数とは繫絡作用素の双対を用いてつながっている。この積分作用素をユークリッド空間の分数作用素で表すことにより新たな逆変換公式が得られた。この公式により、各変換に付随する調和解析とユークリッド空間の調和解析をつなぐことが可能となる。とくに最大関数・Littlewood-Paley g -関数・Lusin 面積関数など畳み込み作用素を含む特異積分を定義でき、かつその有界性を Euclid 空間の場合に帰着することが可能となった。多変数の調和解析、とくに高ランクな半単純リー群上において特異積分論を構築することに関しては $SL(n, \mathbb{R})$, $SU(p, q)$ などの具体的なリー群を対象に具体形な計算から始め、一般論の構築を目指した。以上の研究を遂行するにあたっては分野が多岐に渡ったので多くの研究協力者に支援をいただいた。① 中井英一 (Nakai Eiichi) 茨城大学・理学部・教授 ② 宮地昌彦 (Miyachi Akihiko) 東京女子大学・名誉教授 ③ K. Koufany : l' Université Henri Poincaré, Nancy I, 教授 ④ L. Peng : 北京大学・数学科学学院・教授 ⑤ Lie Heping : 北京大学・数学科学学院・教授 ⑥ Lie Jianming : 北京大学・数学科学学院・准教授 ⑦ R. Daher : University Hassan II, Faculty of Sciences, 教授 ⑧ A. Abouelaz : University Hassan II, Faculty of Science, 教授 (2021 年逝去)の方々に感謝する。

4. 研究成果

研究目的で述べた (a)~(f) の各項へ成果をまとめることは現在進行中である。これらの全体に関連する 1 変数のヤコビ解析における特異積分論の精査および高ランクな $SU(n, m)$ の畳み込み作用素の Kunze-Stein 現象の端点評価に関しては成果をまとめることができた。前者の特異積分論の精査に関しては、ランク 1 なリーマン対称空間上で、Ionescu によって得られていた転移原理を、アーベル変換を間に入れる形に改良して良い結果を得ることができた。関連する話題を⑥~⑩で成果発表をした。後者の Kunze-Stein 現象の端点評価に関しては、高ランクな場合は未解決であった。ランクが任意な複素単純リー群から始め、実半単純リー群の例として $SU(n, m)$ の場合に結果を得ることができた。関連する話題を③~⑤で成果発表し、③~⑤の論文にまとめることができた。

*本研究は研究期間を 2 年間延長した。これは国外研究協力者の招聘がコロナ禍で遂行できなかったことによる。この期間に 2 件の研究論文と 2 件の学会発表を行った。これは 2020 年度からの科研費による成果とし、本研究成果には掲載していない。

主な発表論文等

[雑誌論文] 計 5 件 (うち査読論文 5 件/うち国際共著 1 件)

- ① Takeshi Kawazoe: H1-estimates of the Littlewood-Paley and Lusin functions for Jacobi analysis II, Anal. Theory Appl., vol.32-1, pp.38-51 (2016 年 4 月).
DOI : 10.4208/ata.2016.v32.n1.4
- ② 河添 健 : 関数解析におけるルベーク積分, 数理科学 (サイエンス社), 55 巻, 4 号, pp. 56-57 (2017 年 04 月).
- ③ Takeshi Kawazoe : and Jianming Liu: A modified endpoint estimate of the Kunze-Stein phenomenon associated with complex semisimple Lie groups, Scientiae Mathematicae Japonicae, 2018-1, pp. 1-10. (2018 年 03 月).
- ④ Takeshi Kawazoe: Applications of an inverse Abel transform for Jacobi analysis: Weak-L1 estimates and the Kunze-Stein phenomenon, Tokyo Journal of Mathematics, vol. 41-1, pp. 77-112 (2018 年 6 月).
DOI : 10.3836/tjm/1502179242
- ⑤ Takeshi Kawazoe: An endpoint estimate of the Kunze-Stein phenomenon on $SU(n, m)$, Pacific Journal of Mathematics, vol.302-2, pp.645-657 (2019 年 10 月).
DOI : 10.2140/pjm.2019.302.645

[学会発表] (計 10 件)

- ① Takeshi Kawazoe: Weak L1 estimates for Jacobi analysis, Workshop on Function Theory and Differential Equations and their Applications, Guanzhou University, China (2016 年 6 月 4 日).
- ② Takeshi Kawazoe: Weak L1 estimate of the Hardy-Littlewood maximal operator for Jacobi hypergroup, 4th East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications, Yonsei University, Korea (2016 年 8 月 2 日).
- ③ 河添 健 : 高ランクな半単純リー群における Kunze-Stein 現象の端点評価, RIMS 共同研究 (公開型) 「関数解析の深化とその周辺」 (2017 年 2 月 6 日)
- ④ Takeshi Kawazoe: The endpoint estimate for the Kunze-Stein phenomenon on $SU(n, m)$, Workshop on Harmonic Analysis, Lorraine University, France (2017 年 3 月 6 日).
- ⑤ Takeshi Kawazoe: A modified endpoint estimate of the Kunze-Stein phenomenon associated with complex semisimple Lie groups, 5th East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications, Hangzhou, China (2017 年 6 月 9 日).
- ⑥ Takeshi Kawazoe: Singular integral operators of convolution types related to the Abel transform on semisimple Lie groups, Peking University, China (2018 年 3 月 30 日).

- ⑦ Takeshi Kawazoe: Singular integral operators of convolution types related to the Abel transform on semisimple Lie groups, 6th East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications, Osaka University, Japan (2018年8月2日).
- ⑧ Takeshi Kawazoe: Singular integral operators for Jacobi analysis, 6th Tunisian Japanese Conference "Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications", Djerba, Tunisia (2019年12月18日).
- ⑨ 河添 健: ヤコビ解析における特異積分, 日本数学会, 特別講演 (2019年3月19日).
- ⑩ Takeshi Kawazoe: Singular integral for Jacobi analysis, 7th East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications, Chung-Ang University, Korea (2019年8月6日).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Takeshi Kawazoe	4. 巻 302
2. 論文標題 An endpoint estimate of the Kunze-Stein phenomenon on $SU(n, m)$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Pacific Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 645-657
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/pjm.2019.302.645	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takeshi Kawazoe	4. 巻 41-1
2. 論文標題 Applications of an inverse Abel transform for Jacobi analysis - weak L^1 estimates and the Kunze-Stein phenomenon.	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Tokyo J. Math.	6. 最初と最後の頁 77-112
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Kawazoe	4. 巻 31
2. 論文標題 A modified endpoint estimate of the Kunze-Stein phenomenon associated with complex semisimple Lie groups	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Scientiae Mathematicae Japonicae online	6. 最初と最後の頁 1-10
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 T. Kawazoe	4. 巻 32
2. 論文標題 H1 -Estimates of the Littlewood-Paley and Lusin Functions for Jacobi Analysis II	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Anal. Theory Appl.	6. 最初と最後の頁 38-51
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4208/ata.2016.v32.n1.4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件（うち招待講演 12件 / うち国際学会 8件）

1. 発表者名 Takeshi Kawazoe
2. 発表標題 Singular integrals for Jacobi analysis
3. 学会等名 7th East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takeshi Kawazoe
2. 発表標題 Singular integrals for Jacobi analysis
3. 学会等名 6th Tunisian Japanese Conference "Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications" (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takeshi Kawazoe
2. 発表標題 Singular integral operators of convolution types related to the Abel transform on semisimple Lie groups
3. 学会等名 6th East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 河添 健
2. 発表標題 ヤコビ解析における特異積分
3. 学会等名 日本数学会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takeshi Kawazoe
2. 発表標題 Singular integral for Jacobi analysis
3. 学会等名 北京大学数学教室 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Kawazoe
2. 発表標題 A modified endpoint estimate of the Kunze-Stein phenomenon associated with complex semisimple Lie groups
3. 学会等名 5th East Asia Conference on Harmonic Analysis and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 河添 健
2. 発表標題 高ランクな半単純リー群におけるKunze-Stein現象の端点評価
3. 学会等名 RIMS共同研究 (公開型) 「関数解析の深化とその周辺」 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Kawazoe
2. 発表標題 Weak L1 estimates for Jacobi analysis
3. 学会等名 Workshop on Function Theory and Differential Equations and their Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 T. Kawazoe
2. 発表標題 Weak L1 estimate of the Hardy-Littlewood maximal operator for Jacobi hypergroup
3. 学会等名 4th East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 T. Kawazoe
2. 発表標題 The endpoint estimate for the Kunze-Stein phenomenon on $SU(n,m)$
3. 学会等名 Workshop on Harmonic Analysis, Lorraine University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ダハ (Daher Radouan)	ハッサン大学	
研究協力者	クーファニ (Koufany Khalid)	ロレーヌ大学	
研究協力者	劉 和平 (Liu Heping)	北京大学	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	劉 建明 (Liu Jianming)	北京大学	
研究協力者	何 建勳 (He JianXun)	広州大学	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	ロレーヌ大学			
モロッコ	ハッサンII大学			
中国	北京大学	広州大学		