

令和元年6月13日現在

機関番号：37102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05217

研究課題名(和文) 有界対称領域及び単位球上の正則写像、多重調和写像に関する研究

研究課題名(英文) A study on holomorphic mappings and pluriharmonic mappings on bounded symmetric domains and on the unit ball

研究代表者

濱田 英隆 (HAMADA, Hidetaka)

九州産業大学・理工学部・教授

研究者番号：30198808

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：有限次元既約有界対称領域の間の正則写像やヒルベルト空間の単位球の間の正則写像に対する境界シュワルツの補題を証明した。

有限次元有界対称領域上の正則関数がブロック関数となるための様々な必要十分条件を無限次元有界対称領域に拡張した。また、有界対称領域から有界対称領域への正則写像に対するシュワルツ・ピックの定理を与え、その応用として、有界正則関数がブロック関数であることを証明した。

2次元ユークリッド単位球上で単位円盤上の正則関数 $g$ を用いて定義される $g$ -パラメトリック表現を持つ正則写像の族に対し、有界な支持点が存在することを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これまで得られていた境界シュワルツの補題を、より一般的な有限次元既約有界対称領域や無限次元ヒルベルト空間の単位球に対して証明した。また、境界における条件を連続微分可能性より弱い条件である Julia-Wolff-Caratheodoryの定理のタイプの仮定の下に証明した。

ブロック関数・ブロックセミノルムの新しい定義を用いて、無限次元空間までブロック関数、ブロック空間の定義を拡張した。また、その応用として、有限次元のときに未解決であった(重み付)合成作用素に関する様々な問題を無限次元のときまで含めて解決した。

研究成果の概要(英文)：In this project, we proved the boundary Schwarz lemma for holomorphic mappings between finite dimensional irreducible bounded symmetric domains or between complex Hilbert balls.

We extended several necessary and sufficient conditions to be Bloch functions for holomorphic functions on finite dimensional bounded symmetric domains to infinite dimensional bounded symmetric domains. As an application, we proved that bounded holomorphic functions are Bloch functions.

We proved the existence of bounded support points for the family of holomorphic mappings on 2-dimensional Euclidean unit ball which have  $g$ -parametric representation.

研究分野：多変数函数論

キーワード：ブロック関数 有界対称領域 境界シュワルツの補題 ブロック空間 支持点 シュワルツピックの補題 正則近似 多重調和写像

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 単位円盤上の Bloch 関数に対する Bonk の歪曲度評価式の高次元化として、 $C^n$  のユークリッド単位球  $B^n$  上の正則写像について、X.Y. Liu (Pacific J. Math., 1992) は Bonk の歪曲度評価式を与えた。一方、J.Wang and T.S. Liu (Sci. China Ser. A, 2008) は、 $C^n$  の多重円板  $U^n$  上の正則写像について、同様の最良の Bonk の歪曲度評価式を与えたが、その評価式は X.Y. Liu とは異なるものであった。また、S. Chen, S. Ponnusamy, X. Wang (Complex Anal. Oper. Theory, 2012) は  $-$ Bloch 写像への一般化として、ユークリッド単位球  $B^n$  上の正則写像で 2 つの正規化条件を満たすものに対し、同様の最良の(に依存した)Bonk の歪曲度評価式を与えた。X.Y. Liu (Pacific J. Math., 1992) は、Bloch 写像  $f$  はプレノルムが有限となることを示したので、 $B^n$  上の Bloch 写像に対する歪曲度評価式と考えられる。このことは、J.Wang and T.S. Liu (Sci. China Ser. A, 2008) の多重円盤  $U^n$  上の結果についても同様で、多重円盤  $U^n$  上の Bloch 写像に対する歪曲度評価式と考えられる。しかし、S. Chen, S. Ponnusamy, X. Wang (Complex Anal. Oper. Theory, 2012) は  $-$ Bloch 写像  $f$  が プレノルムが有限となることを示してはいない。

(2) R.M. Timoney (Bull. London Math., 1980, J. Reine Angew. Math., 1980) は  $C^n$  内の有界等質領域上の Bloch 関数について研究し、J. Shi and L. Luo (Acta Math. Sinica, 2000) は  $C^n$  内のユークリッド単位球上の Bloch 空間や little Bloch 空間上の合成作用素の有界性やコンパクト性について研究した。無限次元の場合は、O. Blasco, P. Galindo and A. Miralles (J. Funct. Anal., 2014) が無限次元ヒルベルト空間の単位球上の Bloch 関数について研究している。

(3) 単位円盤上の単葉正則関数全体の族  $S$  はコンパクトで、その支持点はすべて非有界であることが知られている。ユークリッド単位球上  $B^n$  の単葉正則写像全体の族  $S(B^n)$  は、コンパクトでないことが知られており、I. Graham, H. Hamada, G. Kohr (Canadian J. Math., 2002) により  $S(B^n)$  上の部分族  $S^0(B^n)$  が導入され、増大度定理、レブナー微分方程式との関連性、レブナー鎖との関連性などについて単位円盤上の  $S$  と同様の結果が成り立つことが研究されてきた。さらに、単位円盤上のさまざまな単葉正則関数  $g$  を用いて  $S^0(B^n)$  の部分族  $S_{g^0}(B^n)$  を考察し、増大度定理を関数  $g$  を用いて記述し、精密化した。一方、F. Bracci は、 $S^0(B^n)$  には単位円盤上の  $S$  とは異なり、有界な支持点が存在することを証明した。

### 2. 研究の目的

(1)  $C^n$  の有界対称領域上の  $-$ Bloch 写像に対する Bonk の歪曲度評価式等を解明し、さらに、 $-$ Bloch 写像に対する Bloch 定数について考察する。また、 $-$ Bloch 空間から  $-$ Bloch 空間への合成作用素が有界やコンパクトになるための必要十分条件を求める。更に、多重調和写像に一般化する。

(2)  $C^n$  の有界対称領域上の Bloch 関数の同値な定義の多くが無限次元バナッハ空間の有界対称領域上の Bloch 関数についても成り立つことを証明し、Bloch 空間  $B(B_Y)$  から Bloch 空間  $B(B_X)$  への合成作用素が有界やコンパクトになる必要十分条件を求める。更に、多重調和関数に一般化する。

(3) ユークリッド単位球上の単葉正則写像全体のさまざまな部分族の支持点について考察する。

### 3. 研究の方法

(1)  $C^n$  の等質単位球  $B$  上の正則写像に対し、 $-$ Bloch 写像とセミノルムを定義し、Bonk の歪曲度評価式に関し以下の手順で研究を進める。

-Bloch 写像について、セミノルムが有限であることを示す。

-Bloch 写像に対する Bonk の歪曲度評価式を導き出す。

-Bloch 写像に対する Bonk の歪曲度評価式が得られたら、それを応用して  $-$ Bloch 写像に対する Bloch 定数の下からの評価式を得たい。

次に、等質単位球  $B_X$  から等質単位球  $B_Y$  への正則写像による合成作用素については、 $JB^*$ -triple の Bergman 作用素を用いて、合成作用素が有界やコンパクトになるための必要十分条件を与える。一般の無限次元等質単位球で証明が困難な場合には、どちらか一方が有限次元やヒルベルト空間の場合にまず考察し、一般の場合の手掛かりを得る。

(2) Bloch 関数の同値な定義や合成作用素の有界性やコンパクト性に関する研究は以下の手順で研究する。

有限次元の場合に R.M. Timoney (Bull. London Math., 1980) が示した Bloch 関数のさまざまな同値な定義が無限次元等質単位球でも成り立つことを示す。

Bloch 空間  $B(B_Y)$  から Bloch 空間  $B(B_X)$  への合成作用素が有界であるための必要十分条件を、 $JB^*$ -triple の Bergman 作用素を用いて与える。

Bloch 空間  $B(B_Y)$  から Bloch 空間  $B(B_X)$  への合成作用素がコンパクトであるための必要十

分条件を、 $JB^*$ -triple の Bergman 作用素を用いて与える。

上記の方法がうまくいかない場合は  $X, Y$  が無限次元 Hilbert 空間の場合や  $Y$  が有限次元バナッハ空間の場合について考える。

(3) ユークリッド単位球上の単葉正則写像全体のさまざまな部分族の支持点についての研究は、以下の手順で研究する。

$g$  が  $U$  上の単葉正則関数のとき、 $S_g^0(B^n)$  に対応する Caratheodory 関数族  $M_g$  がコンパクトになることを示し、その結果を応用して、 $S_g^0(B^n)$  がコンパクトになることを示す。 $(S_g^0(B^n))$  の元は、 $M_g$  の元を係数とするレブナー常微分方程式やレブナー偏微分方程式の解を用いて記述できることが、I. Graham, H. Hamada, G. Kohr (Canadian J. Math., 2002) により示されている)

F. Bracci (Comput. Methods Funct. Theory, 2015) が  $M$  の有界支持点を見つけるときに用いた "shearing process" の手法を  $M_g$  についても応用し、 $M_g$  の有界支持点を見つける。この手法だけではうまくいかないときは、I. Graham, H. Hamada, G. Kohr (Canadian J. Math., 2002) により示された  $M_g$  の元に対するさまざまな評価式を応用して考察する。

F. Bracci (Comput. Methods Funct. Theory, 2015) が  $S^0(B^n)$  の有界支持点を見つけるときに用いた "shearing process" の手法を  $S_g^0(B^n)$  についても応用し、 $S_g^0(B^n)$  の有界支持点を見つける。この場合も、この手法だけではうまくいかないときは、I. Graham, H. Hamada, G. Kohr (Canadian J. Math., 2002) により示された  $S_g^0(B^n)$  の元に対するさまざまな評価式を応用して考察する。

#### 4. 研究成果

(1) ユークリッド単位球  $B^n$  の間の自己正則写像に対する boundary Schwarz lemma (Liu, Wang and Tang (JGA, 2015)) をヒルベルト空間の単位球の間の正則写像に対する boundary Schwarz lemma に拡張し、更に、Julia の補題より一般的な Julia-Wolff-Caratheodory の定理のタイプの仮定の下に証明した。また、Liu, Wang and Tang (JGA, 2015) では、ユークリッド単位球  $B^n$  の間の正則写像に対する boundary Schwarz lemma の応用として、星型写像に対する歪曲定理を得ているが、本研究では starlike mapping of order  $\alpha$ , strongly starlike mapping of order  $\alpha$ , almost starlike mapping of order  $\alpha$ , parabolic starlike mapping of order  $\alpha$  などの星型写像を一般化し統一的に扱うことができる  $g$ -星型写像に対する歪曲定理を得ている。更に、Burns-Krantz (J. Amer. Math., 1994) による自己正則写像の boundary rigidity theorem を、内点に固定点がある場合にヒルベルト空間の単位球の自己正則写像に拡張した。

(2) 半径方向微分を用いることにより、ブロック型空間や、小ブロック型空間を任意の複素バナッハ空間の単位球上に拡張し、更に、ブロック型空間の間の拡張 Cesaro 作用素を定義し、その作用素が有界作用素やコンパクト作用素になる特徴づけを与えた。

(3)  $A$  が non-resonant であるとは限らず、 $m(A) > 0$  であるすべての  $A$  に対し、正規化された  $C^n$  の正則自己同型写像で  $B^n$  への制限が  $A$ -パラメトリック表現を持つものが  $B^n$  上の  $A$ -パラメトリック表現を持つ単葉正則写像全体の族  $S_A^0(B^n)$  で稠密であることを示した。その手法は、 $A$ -正規化された単葉レブナー鎖の変分について考察し、その応用として、上記の結果を示している。また、無限遠点の近傍で恒等写像である  $C^n$  上の擬等角写像で  $B^n$  への制限が  $A$ -パラメトリック表現を持つものが  $S_A^0(B^n)$  で稠密であることも示した。

(4)  $B_X$  上でブロックセミノルムと小林距離との関係を示し、Allen-Colonna (JMAA, 2009) による有限次元の場合の未解決問題の無限次元まで含んだ解答を与えた。また、Holland-Walsh による単位円盤上のブロック関数の特徴づけをヒルベルト空間の単位球に拡張した。ブロック空間からブロック空間への合成作用素  $C_*$  については、オペレーターノルムの上から及び下からの評価式や  $C_*$  が等長作用素になる十分条件や必要条件を無限次元有界対称領域  $B_X$  上に拡張した。そのうちの 1 つは、Allen-Colonna (JMAA, 2009) による有限次元の場合の問題の無限次元まで含んだ解答になっている。

(5) ユークリッド単位球  $B^n$  の間の自己正則写像に対する boundary Schwarz lemma (Liu, Wang and Tang (JGA, 2015)), classical domains of type I の間の自己正則写像に対する boundary Schwarz lemma (Liu and Tang, (Science China Math., 2017)), classical domains of type II の間の自己正則写像に対する boundary Schwarz lemma (Tang, Liu and Zhang, (J. Geom. Anal., 2018)) を、有限次元既約有界対称領域の間の正則写像に対する boundary Schwarz lemma に拡張し、更に、Julia の補題より一般的な Julia-Wolff-Caratheodory の定理のタイプの仮定の下に証明した。その証明の手法は、有限次元有界対称領域上の小林計量の具体的表現を求め、小林計量の境界の近傍での挙動を調べることにより証明している。

(6) ブロック写像を有限次元有界対称領域上で新しく定義し、ブロック関数に対する Bonk の歪曲定理を、ベルグマン計量を使って、濱田たちにより定義された定数  $c(B_X)$  を用いて有

有限次元有界対称領域上の ブロック写像に拡張し、その応用として、ブロック定数の下からの評価式を定数  $c(B_X)$  を用いて与えた。

(7)  $H^\infty(B_X)$  からブロック空間  $B(B_X)$  への重み付き合成作用素  $W_\lambda$  について以下のような研究を行った。まず、重み付き合成作用素  $W_\lambda$  が有界となるための必要十分条件とそのノルムの評価式を与えた。この結果は、有限次元の結果の無限次元への拡張であり、また、下からの評価式は有限次元の時の結果の改良となっている。また  $H^\infty(B_X)$  からブロック空間  $B(B_X)$  への multiplication operator  $M_\lambda$  について考察し、有限次元の時の Conjecture の無限次元まで含めた回答を与えた。さらに  $H^\infty(B_X)$  からブロック空間  $B(B_X)$  への等長な multiplication operator  $M_\lambda$  が存在しないことを証明した。このことは有限次元の場合に、Conjecture になっており、無限次元まで含めた回答になっている。また、 $H^\infty(B_X)$  からブロック空間  $B(B_X)$  への等長な合成作用素が存在しないことも 2 次元以上で初めて示した。

(8) Liu, Dai and Pan (JMAA, 2016) が与えたユークリッド単位球  $B^n$  の間の多重調和写像に対する boundary Schwarz lemma を、境界での滑らかさの仮定を弱め、結果の評価式が次元による定数であったものを次元によらない定数にし、更に、証明を簡略化した。

(9) 2 次元ユークリッド単位球  $B^2$  上で単位円盤  $U$  上の正則関数  $g$  を用いて定義される  $g$ -パラメトリック表現を持つ正則写像の族  $S_g^0(B^2)$  に対し、Bracci により導入された shearing process を用いて、 $S_g^0(B^2)$  に有界な支持点が存在することを証明した。単位円盤  $U$  上では、 $S^0(U)$  の支持点はすべて非有界であるので、1 変数関数論と多変数関数論の違いの 1 つになっている。

(10) R. Timoney (Bull. London Math., 1980) は、ベルグマン計量を用いて有限次元有界対称領域(もっと一般に等質領域)上のブロック関数・ブロックセミノルムを定義し、今まで、有限次元有界対称領域(等質領域)上では、この Timoney による定義を用いて様々な研究がなされてきた。しかし、ベルグマン計量は無限次元空間では考えられないので、本研究では、ベルグマン計量の代わりに小林計量を用いて、無限次元有界対称領域上のブロック関数・ブロックセミノルムを定義した。有限次元有界対称領域の時は、ベルグマン計量と小林計量は同値であるから、本研究による定義は、有限次元の時は Timoney の定義と同値である。本研究では、ブロック関数・ブロックセミノルムの新しい定義を用いて、有限次元有界対称領域上の正則関数がブロック関数となるための様々な必要十分条件を無限次元有界対称領域に拡張した。また、有界対称領域から有界対称領域への正則写像に対するシュワルツ・ピックの定理を与え、その応用として、有界対称領域上の有界正則関数がブロック関数であることを証明した。更に、ブロック空間からブロック空間への合成作用素は常に有界な作用素であることを示し、また、コンパクト作用素になるための必要十分条件を有限次元から無限次元に拡張した。

## 5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 14 件)

[Hidetaka Hamada](#), Distortion theorems, Lipschitz continuity and their applications for Bloch type mappings on bounded symmetric domains in  $C^n$ , Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 査読有、to appear.

DOI:10.5186/aasfm.2019.4451

[Hidetaka Hamada](#), Bloch-type spaces and extended Cesaro operators in the unit ball of a complex Banach space, Sci. China Math., 査読有、62 (2019), 617-628.

DOI:10.1007/s11425-017-9183-5

[Hidetaka Hamada](#), Mihai Iancu and Gabriela Kohr, Approximation of univalent mappings by automorphisms and quasiconformal diffeomorphisms in  $C^n$ , J. Approx. Theory, 査読有、240 (2019), 129-144.

DOI:10.1016/j.jat.2018.10.003

Cho-Ho Chu, [Hidetaka Hamada](#), Tatsuhiro Honda and Gabriela Kohr, Bloch space of a bounded symmetric domain and composition operators, Complex Anal. Oper. Theory, 査読有、13 (2019), 479-492.

DOI:10.1007/s11785-018-0835-0

[Hidetaka Hamada](#), A Schwarz lemma at the boundary using the Julia-Wolff-Caratheodory type condition on finite dimensional irreducible bounded symmetric domains, J. Math. Anal. Appl., 査読有、465 (2018), 196-210.

DOI:10.1016/j.jmaa.2018.04.076

[Hidetaka Hamada](#) and Gabriela Kohr,  $\lambda$ -Bloch mappings on bounded symmetric domains in  $C^n$ , Complex Anal. Oper. Theory, 査読有、12 (2018), 509-527.

DOI:10.1007/s11785-017-0718-9

[Hidetaka Hamada](#), Mihai Iancu, Gabriela Kohr and Sebastian Schleissinger, Approximation properties of univalent mappings on the unit ball in  $C^n$ , J. Approx.

Theory, 査読有、226 (2018), 14-33.

DOI:10.1016/j.jat.2017.11.005

Hidetaka Hamada, Weighted composition operators from  $H^\infty$  to the Bloch space of infinite dimensional bounded symmetric domains, Complex Anal. Oper. Theory, 査読有、12 (2018), 207-216.

DOI:10.1007/s11785-016-0624-6

Hidetaka Hamada, A simple proof for the boundary Schwarz lemma for pluriharmonic mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 査読有、42 (2017), 799-802.

DOI:10.5186/aasfm.2017.4245

Ian Graham, Hidetaka Hamada, Gabriela Kohr, and Mirela Kohr, Bounded support points for mappings with g-parametric representation in  $C^2$ , J. Math. Anal. Appl., 査読有、454 (2017), 1085-1105.

DOI:10.1016/j.jmaa.2017.05.023

Cho-Ho Chu, Hidetaka Hamada, Tatsuhiro Honda and Gabriela Kohr, Bloch functions on bounded symmetric domains, J. Funct. Anal., 査読有、272 (2017), 2412-2441.

DOI:10.1016/j.jfa.2016.11.005

Cho-Ho Chu, Hidetaka Hamada, Tatsuhiro Honda and Gabriela Kohr, Distortion of locally biholomorphic Bloch mappings on bounded symmetric domains, J. Math. Anal. Appl., 査読有、441 (2016), 830-843.

DOI:10.1016/j.jmaa.2016.04.035

[学会発表](計21件)

濱田 英隆(代表)、Mihai Iancu、Gabriela Kohr、Approximation of univalent mappings by automorphisms and quasiconformal diffeomorphisms in  $C^n$ 、日本数学会2019年度年会、2019年

濱田 英隆(代表)、Mihai Iancu、Gabriela Kohr、Sebastian Schleissinger、Approximation properties of univalent mappings on the unit ball in  $C^n$ 、日本数学会2019年度年会、2019年

Cho-Ho Chu、濱田 英隆(代表)、本田 竜広、Gabriela Kohr、Bloch space of a bounded symmetric domain and composition operators、日本数学会2019年度年会、2019年

濱田 英隆、Distortion Theorems, Lipschitz Continuity and their Applications for Bloch Type Mappings on Bounded Symmetric Domains in  $C^n$ 、研究集会「リーマン面論の展望」、2018年

Ian Graham、濱田 英隆(代表)、Gabriela Kohr、A boundary rigidity theorem for holomorphic self-mappings of Hilbert balls、日本数学会2018年度秋季総合分科会、2018年

Ian Graham、濱田 英隆(代表)、Gabriela Kohr、A Schwarz lemma at the boundary on complex Hilbert balls and applications to starlike mappings、日本数学会2018年度秋季総合分科会、2018年

濱田 英隆、A Schwarz lemma at the boundary on finite dimensional irreducible bounded symmetric domains、日本数学会2018年度秋季総合分科会、2018年

濱田 英隆、A Schwarz lemma at the boundary for pluriharmonic mappings、日本数学会2018年度秋季総合分科会、2018年

Hidetaka Hamada、g-Loewner chains, Bloch functions and extension operators、International Workshop on Conformal Dynamics and Loewner Theory 2018、2018年

濱田 英隆、A Schwarz lemma at the boundary on complex Hilbert balls、研究集会「リーマン面論の展望」、2017年

濱田 英隆、The reachable families and the support points in several complex variables、日本数学会2017年度秋季総合分科会、2017年

濱田 英隆、Bounded support points for the families with parametric representation in several complex variables、日本数学会2017年度秋季総合分科会、2017年

濱田 英隆、Bounded support points for the Caratheodory families in several complex variables、日本数学会2017年度秋季総合分科会、2017年

濱田 英隆、Weighted composition operators from  $H^\infty$  to the Bloch space of bounded symmetric domains、日本数学会2017年度年会、2017年

Cho-Ho Chu、濱田 英隆(代表)、本田 竜広、Gabriela Kohr、Composition operators between Bloch spaces on bounded symmetric domains、日本数学会2017年度年会、2017年

Cho-Ho Chu、濱田 英隆(代表)、本田 竜広、Gabriela Kohr、Bloch functions on bounded symmetric domains、日本数学会2017年度年会、2017年

濱田 英隆、Some Results on the Schwarz Lemma at the Boundary and the Extended Cesaro Operator、研究集会「リーマン面論の展望」、2016年

[その他]

ホームページ等

<http://ras.kyusan-u.ac.jp/professor/0003820/profile.html>

## 6 . 研究組織

### (1)研究協力者

研究協力者氏名：本田 竜広

ローマ字氏名：(HONDA, tatsuhiro)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。