

令和 3 年 6 月 1 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K05222

研究課題名(和文) 主部の係数が時間のみ関する双曲型作用素の特徴付け

研究課題名(英文) Characterization of hyperbolic operators with the coefficients of the principal part depending only on the time variable for which the Cauchy problem is well-posed

研究代表者

若林 誠一郎 (Wakabayashi, Seiichiro)

筑波大学・数理物質系(名誉教授)・名誉教授

研究者番号：10015894

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：先行研究によって、主部の係数が時間変数の実解析関数である2重特性的な高階双曲型作用素に対して、コーシー問題のC 適切性のための十分条件を得たが、この十分条件が、空間次元が2以下のとき、または主部の係数が時間変数の半代数関数(例えば多項式)のとき、必要条件でもあることを示した。

また、係数が時間変数の実解析関数である3重特性的な高階双曲型作用素に対して、そのコーシー問題を考察して、C 適切性の特徴付けに関して、同様の結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

双曲型作用素に対するコーシー問題のC 適切性の特徴付けは、偏微分方程式論における主要なテーマの一つであり、これまでに多くの研究があるが、未だ満足いく結果は得られていないのが現状である。報告者が、主部の係数が時間変数にのみ依存する特別な枠組みではあるが、2重特性的である場合にC 適切性の特徴付けを与えたことは、今後のこの分野の研究・発展に貢献するものと期待される。また3重特性的な場合を扱うために、subprincipal symbolを一般化して、sub-sub-principal symbolを初めて定義して、係数が時間変数のみ依存する場合に、C 適切性の特徴付けを与えた。

研究成果の概要(英文)：In the preceding researches I obtained sufficient conditions of C well-posedness of the Cauchy problem for higher-order hyperbolic operators with double characteristics satisfying the conditions that the coefficients of the principal parts are real analytic functions of the time variable. And I showed that these sufficient conditions are also necessary when the space dimension is less than 3 or the coefficients of the principal parts are semi-algebraic functions (e.g., polynomials) of the time variable.

I also considered the Cauchy problem for higher-order hyperbolic operators with triple characteristics whose coefficients are real analytic functions of the time variable. And I obtained similar results concerning the characterization of C well-posedness.

研究分野：数学・基礎解析学

キーワード：双曲型作用素 コーシー問題 C 適切性 超局所解析

1. 研究開始当初の背景

双曲型方程式に対するコーシー問題が C^∞ 適切になるためには、一般に低階項 (の表象) に条件を課す必要があり、これに関しては多くの先行研究がある。単独高階双曲型方程式に限って記せば、まず ペトロフスキーの狭義双曲型方程式の C^∞ 適切性 (L^2 適切性) についての研究やゴールドディングによる定数係数双曲型方程式の C^∞ 適切性の特徴付けの研究が挙げられる。1970年代以降、変係数の弱双曲型方程式に対する C^∞ 適切性の研究が活発に続けられてきて、特性根の重複度が一定な双曲型作用素に対する低階項の満たすべき条件 (大矢・溝畑・シャザラン・フラシュカ・ストラングの各氏による) や強双曲型作用素 (どんな低階に対しても C^∞ 適切になる双曲型作用素) の特徴付け (イブリー - ペトコフ・岩崎の各氏による) 等の結果が得られている。さらに主部が定数係数である場合の C^∞ 適切性の特徴付け (若林による) や、2階2変数で係数が解析的である双曲型作用素に対する C^∞ 適切性の特徴付け (西谷氏による) が得られている。報告者 (若林) は最近、下記論文 [W1] において、特性根の重複度が一定である場合や主部が定数係数である場合を含むより広いクラスに対して、 C^∞ 適切性の特徴付けを得た。このように主部に制限を置いて、 C^∞ 適切性の必要十分条件を与えるいくつかの結果が知られている。また、一般の双曲型作用素に対するコーシー問題については、1993年に発表した梶谷・若林による下記論文 [KW] によって、 C^∞ 適切性の十分条件の研究が、超局所 Carleman 型評価の導出の問題に帰着され、その後の研究において、種々の超局所 Carleman 型評価を導出して、特殊な形の双曲型作用素を除いて、それまでに得られていたすべての十分条件を含む形で、 C^∞ 適切性の十分条件を与えてきた。その後、報告者は C^∞ 適切性の特徴付けを得るという観点から、まず、作用素の主部に制限を置いて、コーシー問題を考察することにした。主部の係数が時間変数のみに依存しかつ実解析的である2階双曲型方程式に対して、 C^∞ 適切性の十分条件を与え、その条件が空間次元が2以下のときまたは主部の係数が半代数関数 (例えば多項式) のとき、必要条件にもなっていることを示した ([W2] 参)。さらに、高階で係数が時間変数のみに依存する双曲型作用素に対しては、作用素が高々2重特性的であれば同様の結果が成り立つことを示した。また3階の作用素に対して、1階の項に対応して、初めて sub-sub-principal symbol を定義して、これと subprincipal symbol に条件を課して、 C^∞ 適切性のための十分条件を得た ([W3] 参)。しかし、主部の係数が時間変数のみに依存する高階の双曲型方程式に対してさえ、満足すべき結果が得られていない状況であった。ましてや、一般の双曲型方程式に対しては、コーシー問題の C^∞ 適切性の必要十分条件 (特徴付け) の予想されない状況であった。 C^∞ 適切性の必要十分条件が得られる双曲型方程式のクラスを広げていくことが望まれていた。

[W1] S. Wakabayashi, On the Cauchy problem for hyperbolic operators with nearly constant coefficient principal part, Funkcialaj Ekvacioj **51** (2008), 395 - 430

[KW] K. Kajitani and S. Wakabayashi, Microlocal a priori estimates and the Cauchy problem I & II, Japanese J. Math. **19** (1993), 353 - 418 & **20** (1994), 1 - 71

[W2] S. Wakabayashi, On the Cauchy problem for second-order hyperbolic operators with the coefficients of their principal parts depending only on the time variable, Funkcialaj Ekvacioj **55** (2012), 99 - 136

[W3] S. Wakabayashi, On the Cauchy problem for a class of hyperbolic operators whose coefficients depend only on the time variable, Tsukuba J. Math. **39** (2015), 121 - 163

2. 研究の目的

有限の伝播速度をもつ現象を記述すると考えられる双曲型方程式に対して、そのコーシー問題 (初期値問題) が C^∞ 函数の枠組で適切になる (解が一意に存在する) ための必要十分条件 (特徴付け) を、できるだけ弱い仮定の下で得ることを目的とする。さらに解の構造・性質・挙動についても考察する。特に、

(1) 主部の係数が時間変数のみに依存する2重特性的な高階双曲型方程式に対するコーシー問題の C^∞ 適切性の必要十分条件を得る。

(2) 主部の係数が時間変数のみに依存する3階双曲型方程式に対するコーシー問題の C^∞ 適切性の必要十分条件を得る。

(3) 主部の係数が時間変数のみに依存する高階双曲型方程式に対する C^∞ 適切性について考察する。この作用素に対して sub-sub-principal symbol 及びその一般化を如何に定義すべきかについて考え、場合によってはさらに作用素を制限することにより、3階の作用素に対する結果を一般化する。

(4) 「主部の係数が時間変数のみに依存し有限次退化 (例えば実解析函数) である高階双曲型方程式に対して、低階を適当に選べば、そのコーシー問題が常に C^∞ 適切になる」という予想を証明する。

(5) 主部の係数が時間変数のみに依存する高階双曲型方程式のコーシー問題の解の特異性を調べる。すなわち、解の特異性は、generalized Hamilton flow を用いて記述されるという以前の報告者の予想が、この場合に正しいことを示す。

(6) 主部の係数が時間変数のみに依存する一般的双曲型方程式に対して、そのコーシー問題の適切性の必要十分条件が得られるような双曲型方程式のクラスを広げていくことを目指す。

3. 研究の方法

主部の係数が時間変数のみに依存する双曲型方程式を研究対象とし、まず2重特性的な高階双曲型方程式に対して、下記論文 [W4] を参考に、subprincipal symbol に対する条件の形で、C 適切性の特徴付けを与える。次に、3階双曲型方程式に対しても、subprincipal symbol、sub-sub-principal symbol に対する条件の形で、特徴付けを与える。高階双曲型方程式に対して、sub-sub-principal symbol 及びその一般化を考え、必要十分条件の予想をたて、必要なら方程式を制限してその予想を証明し、C 適切性の特徴付けの研究につなげていく。

(1) 主部の係数が時間変数のみに依存する2重特性的な高階双曲型方程式に対して、subprincipal symbol に対する条件として、コーシー問題のC 適切性の十分条件を記述し証明を与える。また、イブリ - ペトコフの方法を適用して、C 適切であれば成立するはずのエネルギー評価を満たさない漸近解を構成することにより、この十分条件の必要性についても考察する。

(2) 先行研究において、係数が時間変数のみに依存する3階双曲型方程式に対するコーシー問題のC 適切性のための十分条件を与えたが、この条件が必要条件にもなっていることを、漸近解を構成することにより証明する。

(3) 係数が時間変数のみに依存する3重特性的な高階双曲型方程式に対して、超局所的に作用素を時間微分に関して3階以下の作用素の積で表して(因数分解して)、コーシー問題のC 適切性の特徴付けについて研究する。

(4) 主部の係数が時間変数のみに依存する3重特性的な高階双曲型方程式に対して、上記(1)の方法を適用することにより、コーシー問題のC 適切性の特徴付けについて研究する。

(5) 主部の係数が時間変数のみに依存する一般の高階双曲型方程式に対して、sub-sub-principal symbol 及びさらに低階に関する条件を如何に定義するべきか考え、必要十分条件の予想をたて、必要ならいくつかの仮定をおくことにより、その証明を試み、C 適切性の必要十分条件の研究につなげていく。

(6) 研究集会・セミナー等での発表・議論を通して国内外の研究者との研究交流を図り、本研究を発展させる。

[W4] S. Wakabayashi, On the Cauchy problem for hyperbolic operators of second order whose coefficients depend only on the time variable, J. Math. Soc. Japan, **62** (2010), 95-133

4. 研究成果

(1) 報告者の先行研究で、主部の係数が時間変数のみに依存する2階の双曲型作用素に対して、そのコーシー問題がC 適切になるための十分条件を subprincipal symbol を用いて与え、その条件が空間次元が2以下であるかまたは主部の係数が半代数関数であるとき、必要条件にもなっていることを示した。さらに、この結果を高階の作用素に一般化して、係数が時間変数のみに依存する2重特性的である高階双曲型作用素に対して同様の結果が成り立つことを示した。本研究においては、主部の係数が時間変数のみに依存する2重特性的である高階双曲型作用素に対して、広中の特異点解消定理の助けを借りて、そのコーシー問題のC 適切性の同様の特征付けを与えた。ワイエルシュトラスの予備定理を適用しても、必ずしも、実解析的なシンボルが時間変数の擬多項式 \times nonzero factor と表せるとは限らないが、広中の特異点解消定理と組み合わせることにより、この困難を乗り越えることが出来ることを示した。この手法は非常に有効であり、他の問題への応用が期待される。

(2) 報告者の先行研究で、3階の双曲型作用素で係数が時間変数のみに依存する場合に、subprincipal symbol 及び、1階の項に対しては、所謂「sub-sub-principal symbol」を定義して、それに条件を課して、そのコーシー問題がC 適切になることを示した。本研究において、この条件が空間次元が2以下であるかまたは主部の係数が半代数関数であるとき、必要条件にもなっていることを示した。これは問題に応じて「sub-sub-principal symbol」を如何に定義すべきかを示す一例になっている。必要条件にもなっていることを示せたことは、sub-sub-principal symbol の定義の妥当性を示すものである。また、3階の作用素に対しては、制限された量子化正準変換の下で、sub-sub-principal symbol の定義が不変であることも注意し、低階の係数が空間変数に依存する場合にも、普遍性の立場から、sub-sub-principal symbol の定義を与えた。ただし、主部の係数が時間変数のみに依存して、低階が空間変数にも依存する場合に、コーシー問題の適切性については、今のところ何の結果も得ていない。sub-sub-principal symbol に対する条件は、今までには知られていない新しい条件である。一般的双曲型作用素に対して、sub-sub-principal symbol 及びその一般化を如何に定義するべきかということが、今後の研究を進める上で、非常に重要になってくるという知見を得た。

(3) 係数が時間変数のみに依存する3重特性的である高階双曲型作用素に対して、超局所的

に作用素を時間微分に関して3階以下の作用素の積で表して(因数分解して)、そのコーシー問題がC 適切になるための十分条件を与えた。初めはより制限的な仮定において結果を得たが、最終的には不必要な仮定なしで、その十分条件が、空間次元が2以下であるかまたは係数が半代数函数であるとき、必要条件にもなっていることを示した。ここで得た条件は、subprincipal symbol に対する条件と、3階の場合には、sub-sub-principal symbol に対する条件に一致する条件からなっている。この場合にも、広中の特異点解消定理の助けを借りて証明を与えた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Wakabayashi Seiichiro	4. 巻 63
2. 論文標題 On the Cauchy Problem for Hyperbolic Operators with Double Characteristics whose Principal Parts Have Time Dependent Coefficients	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Funkcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 345 ~ 418
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1619/fesi.63.345	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 2件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 若林 誠一郎
2. 発表標題 On the Cauchy problem for hyperbolic operators with triple characteristics whose coefficients depend only on the time variable
3. 学会等名 第12回ISAAC Conference（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 若林 誠一郎
2. 発表標題 係数が時間変数のみに依存する3階双曲型作用素に対する Cauchy 問題
3. 学会等名 第35回松山キャンプ
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 若林 誠一郎
2. 発表標題 主部の係数が時間変数のみに依存する双曲型作用素について
3. 学会等名 第34回松山キャンプ(山口大学理学部)（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 若林 誠一郎
2. 発表標題 係数が時間変数のみに依存する3重特性的な双曲型作用素に対するコーシー問題
3. 学会等名 第33回松山キャンプ(山口大学理学部)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 若林 誠一郎
2. 発表標題 主部の係数が時間変数のみに依存する2重特性的な双曲型作用素に対するコーシー問題 (II)
3. 学会等名 第32回松山キャンプ
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>The Home Page of Wakabayashi, Seiichiro http://www.math.tsukuba.ac.jp/~wkbysh/</p>

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------