様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 6 月 12 日現在

機関番号：１３２０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５２２６

研究課題名（和文）ゲーム理論において現れる不連続な非線形項を持つ放物型方程式系の研究

研究課題名（英文）Study of parabolic systems with discontinuous nonlinearities arising in game theory

研究代表者
出口　英生（DEGUCHI, Hideo）

富山大学・大学院理工学研究部（理学）・准教授

研究者番号：３０４３２１１５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：ゲーム理論において、ナッシュ均衡の概念はゲームの解概念として重要な役割を果たしてきたが、複数のナッシュ均衡が存在する場合、プレイヤーはどのナッシュ均衡をプレイすべきか？という問題に直面する。これを均衡選択の問題という。この問題を扱うために、Hofbauer(1999)は、プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で最適反応動学（一部のプレイヤーが現状に対する最適な戦略をとることで社会が動いていくという動学）を修正し、ナッシュ均衡のコンパクト開位相の意味での漸近安定性を用いて空間支配の概念を提案した。本研究では、空間支配による均衡選択の基準を調べ、他のアプローチとの比較を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義
空間支配の概念は、危険支配やナッシュ積などの均衡選択の他の重要な概念と密接に関係していることが知られているが、一般のゲームに対する空間支配による均衡選択の基準は、まだ知られていない。また、空間支配の概念を導入する際に用いた、不連続な非線形項を持つ放物型方程式系に対する初期値問題の解の存在と一意性の問題も、特定のゲームの場合を除いて未解決である。本研究では、これらの問題を部分的に解決することができた。

研究成果の概要（英文）：The concept of Nash equilibrium has played a central role as a solution concept in game theory. However, when a game has multiple Nash equilibria, the players face a problem which equilibrium they should play. To treat this problem, Hofbauer(1999) introduced the concept of spatial dominance by means of the stability of a constant stationary solution, which corresponds to a Nash equilibrium, to a reaction-diffusion system. That a Nash equilibrium is spatially dominant means that if it initially prevails on a large finite part of the space, then it takes over the whole space in the long run. In this research project we investigated the selection criterion of spatial dominance.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：ゲーム理論　放物型方程式　不連続な非線形項　安定性　進行波解

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９、CK－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

ナッシュ均衡は、ゲームに参加している各プレイヤーが、他のプレイヤーの戦略を所与として、自分の利得が最大となる戦略（最適な戦略）をとっている状態である。ゲーム理論において、ナッシュ均衡の概念はゲームの解概念として重要な役割を果たしてきたが、現実の人々ははたしてナッシュ均衡を実際にプレイするだろうか？この問題は、特に、複数のナッシュ均衡が存在する場合には深刻なものとなる。なぜなら、たとえ均衡がプレイされるということがわかっていたとしても、それぞれが別々の均衡がプレイされると思っていたとしたら実際には均衡がプレイされないからである。この問題を扱うために、GilboaとMatsui(1991)は最適反応動学を導入し、この動学の下で漸近安定となる戦略分布の集合をゲームの新しい解として提案した。最適反応動学は、一部の人々が現状に対する最適な戦略をとることで社会が動いていくという動学であり、不連続な非線形項を持つ常微分方程式系に対する初期値問題によって記述される。この動学の下で一意なナッシュ均衡は必ずしも漸近安定となるとは限らないが、このことは特に問題とはならない。なぜなら、それは社会の状態が必ずしも常に一点にとどまり続けるとは限らないということを意味しているにすぎないからである。最適反応動学の下で漸近安定となる戦略分布の集合はナッシュ均衡より自然で理にかなったゲームの解を与えているように思える。

　また、複数のナッシュ均衡が存在する場合、どのナッシュ均衡がプレイされるかという問題を均衡選択の問題という。戦略数 2 の 2 人ゲームに対する均衡選択の重要な概念として、Harsanyi と Selten(1988)の危険支配の概念がある。ナッシュ均衡が危険支配的であるとは、ナッシュ均衡が実現しないかもしれないというプレイヤー共有のリスクが最小の状態であることを意味する。最適反応動学の下で漸近安定となる戦略分布の集合は一般に複数のナッシュ均衡を含むので、均衡選択の問題の研究には適さない。このため、Hofbauer(1999)は、プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で最適反応動学を修正した。この動学は、不連続な非線形項を持つ放物型方程式系に対する初期値問題によって記述される。彼は、この動学の下でのナッシュ均衡のコンパクト開位相の意味での漸近安定性を用いて空間支配の概念を提案した。ナッシュ均衡が空間支配的であるとは、初期時刻に空間の大部分で他の均衡より優勢であれば、時間無限大でそれは全空間上で支配的となるということを意味する。空間支配的となるナッシュ均衡は高々一つであるので、存在が示せれば、均衡選択の基準になり得る。彼は、戦略数 2 の 2 人ゲームに対して空間支配アプローチによる均衡選択の基準と危険支配アプローチのそれとが一致することを証明した：

・J. Hofbauer, The spatially dominant equilibrium of a game, Annals of Operations Research 89(1999) 233-251.

全く異なる均衡選択アプローチによる結果が一致するのは非常に興味深い。以上より、プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で修正された最適反応動学の下でコンパクト開位相の意味で漸近安定となる戦略分布の集合は、GilboaとMatsui(1991)の解の欠点を補い、より理にかなったゲームの解となるのではないかと考えられる。これが、本研究の動機である。

　国内外における当該研究の位置づけについては、ゲーム理論における新しい解概念を提案するために、今までに動学を用いたアプローチが数多く考えられているが、それらのほとんどが常微分方程式系で記述される。本研究では、偏微分方程式系である、不連続な非線形項を持つ放物型方程式系を用いる。偏微分方程式系を用いることによって、より現実にあったモデル化が可能となる。不連続な非線形項を持つ放物型方程式系の研究に関しては、Carl、Heikkila 等を中心に、境界値問題の解の理論的な存在性に関する研究が行われている。応用の面から見ると、Feireisl と Norbury による燃焼問題の観点からの研究や、McKean によって提案された FitzHugh-Nagumo 方程式の区分的に線形なバージョンとしての不連続な非線形項を持つ放物型方程式系の研究等が盛んに行われている。しかしながら、上述の、ゲーム理論において生じるような不連続な非線形項を持つ放物型方程式系に対する初期値問題は、今のところ、ほとんど研究されていない。また、日本では、理論の面からも応用の面からも不連続な非線形項を持つ放物型方程式系を研究している数学者の数は余り多くない。

２．研究の目的

プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で修正された最適反応動学の下で、プレイヤーの集団の戦略分布は、不連続な非線形項を持つ放物型方程式系に対する初期値問題を満たす。本研究の第一の目的は、この初期値問題の解の存在と一意性を研究すること、第二の目的は、この動学の下でコンパクト開位相の意味で漸近安定となる戦略分布の集合をゲームの新しい解として提案し、その妥当性を議論することである。

３．研究の方法

(1) プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で修正された最適反応動学を記述する不連続な非線形項を持つ放物型方程式系に対する初期値問題の解の存在と一意性を研究する。

R上に分布したプレイヤーの集団を考える。プレイヤー間の局所的な相互作用は最適反応動学によって説明されると仮定する。最適反応動学は、一部のプレイヤーが現状に対する最適な戦略に移行するという状況をモデル化する。さらに、プレイヤーのランダムな移動は拡散によってモデル化されると仮定する。このとき、プレイヤーの集団の戦略分布は、不連続な非線形項を持つ放

物型方程式系に対する初期値問題を満たす。下記の論文では、時間離散化による近似を用いることにより、戦略数nの対称2人ゲームの場合に生じる初期値問題の解の存在性を証明した：
[1] Hideo Deguchi, A reaction-diffusion system arising in game theory: existence of solutions and spatial dominance, Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. 22 (2017) 3891-3901.
また、初期状態によってプレイヤーは複数の最適な戦略を持つので、一般に解の一意性は期待できない。下記の論文では、戦略数2の対称2人ゲームの場合を考え、優解劣解を構成し比較定理を証明することによって、解の一意性、非一意性のための十分条件を得た：
[2] Hideo Deguchi, Existence, uniqueness and non-uniqueness of weak solutions of parabolic initial-value problems with discontinuous nonlinearities, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A 135 (2005) 1139-1167.
上記2論文を出発点として一般のゲームの場合に生じる初期値問題の解の存在と一意性を研究する。

(2)プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で修正された最適反応動学の下で、コンパクト開位相の意味で漸近安定となる戦略分布の集合をゲームの新しい解として提案する。一意なナッシュ均衡が存在する場合と複数のナッシュ均衡が存在する場合とに分けて、どのような戦略分布の集合がコンパクト開位相の意味で漸近安定となるかを調べる。
① 一意なナッシュ均衡が存在する場合
Hofbauer(1995)は、最適反応動学に対するリヤプノフ関数を構成し、どのような戦略分布の集合が漸近安定となるかを研究した。また、一意なナッシュ均衡が不安定となるゲームの例を与え、漸近安定となる周期的に変化する戦略分布に従った場合のプレイヤーの期待利得はナッシュ均衡に従った場合の期待利得より高いという興味深い結果を得た：
· Stability for the best response dynamics, J. Hofbauer, preprint, 1995.
そこで、Hofbauer(1995)で構成されたリヤプノフ関数を手掛かりとし、最適反応動学の下で漸近安定となる戦略分布の集合は、プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で修正された最適反応動学の下でもコンパクト開位相の意味で漸近安定となるかどうかを調べる。さらに、漸近安定となる戦略分布の集合上でのプレイヤーの期待利得と、一意なナッシュ均衡に従った場合の期待利得を比較することによって、漸近安定となる戦略分布の集合のゲームの新しい解としての妥当性を議論する。
② 複数のナッシュ均衡が存在する場合
まず、どのナッシュ均衡がプレイされるかという均衡選択の問題を考える。戦略数2の2人ゲームに対する均衡選択の重要な概念として、Harsanyi と Selten (1988)の危険支配の概念がある。上記論文[1]では、Hofbauer教授（ウィーン大学）との討論を通して、危険支配の概念の戦略数nの対称2人ゲームへの一般化である1/2支配の概念と空間支配の概念を比較し、1/2支配的なナッシュ均衡は空間支配的であることを証明した。本研究では、まず、1/2支配的なナッシュ均衡が存在しない場合の空間支配による均衡選択の基準を調べる。その際、ある特定の不連続な非線形項を持つ放物型方程式系に対して、優解劣解を構成し、比較定理を証明することによって定数定常解がコンパクト開位相の意味で漸近安定となるための必要十分条件を得た下記の論文を出発点とする：
[3] Hideo Deguchi, Existence, uniqueness and stability of weak solutions of parabolic systems with discontinuous nonlinearities, Monatshefte fuer Mathematik 156 (2009) 211-231.
さらに、他のアプローチによる均衡選択の基準との比較も行う。もちろん、必ずしも空間支配的なナッシュ均衡が存在するとは限らない。空間支配的なナッシュ均衡が存在しない場合Hofbauer (1995)において構成された最適反応動学に対するリヤプノフ関数を手掛かりとし、コンパクト開位相の意味で漸近安定となる戦略分布の集合は存在するか？存在するならば、その集合上でのプレイヤーの期待利得と、ナッシュ均衡に従った場合の期待利得を比較することによって、漸近安定となる戦略分布の集合のゲームの新しい解としての妥当性を議論する。

## ４．研究成果
(1)プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で修正された最適反応動学は、不連続な非線形項を持つ放物型方程式系に対する初期値問題によって記述される。この初期値問題の解の存在や一意性は今のところ、特定の2人ゲームの場合しか議論されていない。そこで、より一般のゲームの場合に生じる不連続な非線形項を持つ放物型方程式系に対する初期値問題を扱い、その連続解の存在性を証明した。また、連続解の一意性を議論し、一意性が成り立つための（非一意性が成り立つための）十分条件を得た。

(2)ナッシュ均衡の空間支配性について研究し、ナッシュ均衡が空間支配的となるための（空間支配的とならないための）十分条件を得た。また、空間支配的となるナッシュ均衡が存在しない場合、どのような戦略分布の集合がコンパクト開位相の意味で漸近安定となるかを調べた。その際、Hofbauer(1995)において構成された最適反応動学に対するリヤプノフ関数を用いた。

(3)プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で修正された最適反応動学は、不連続な非線形項を持つ放物型方程式系に対する初期値問題によって記述される。Hofbauer(1999)は、簡単のため、拡散係数は戦略と独立であると仮定した。そこで、本研究では、拡散係数が戦略に依存する場合のナッシュ均衡の支配関係について研究を行った。この場合、空間支配の概念をそのまま用いることは有効でないので、進行波解によるアプローチを用いた。すなわち、2つの均衡をつなぐ進行波解を考え、それに沿ってどちらの均衡が支配的となるかを考えた。進行波解の存在性、一意性を議論し、進行波解の速度が、拡散係数、利得にどのように依存するかを詳しく調べた。

以上の結果は、現在、投稿するために準備中である。

## ５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　１　件）

Hideo Deguchi, A reaction-diffusion system arising in game theory: existence of solutions and spatial dominance, Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. 22 (2017), 3891--3901.（査読有）
10.3934/dcdsb.2017200

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。