

令和 3 年 6 月 7 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2020

課題番号：16K05228

研究課題名（和文）流体方程式の解の正則性と一意性についての調和解析学的研究

研究課題名（英文）On regularity and uniqueness of solutions to partial differential equations in Fluid Mechanics and Harmonic Analysis

研究代表者

谷内 靖 (Taniuchi, Yasushi)

信州大学・学術研究院理学系・教授

研究者番号：80332675

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,600,000円

研究成果の概要（和文）：Brezis-Gallouet-Waingerの対数型不等式を満たす最大のノルム空間を見つけることに成功し、その結果を利用し、非圧縮性粘性流体の運動を記述する3次元Navier-Stokes方程式の解の正則性に関して、有名なBeale-Kato-Majda型の爆発判定条件の改良に成功した。例えば、外部領域における3次元Navier-Stokes方程式の強解の最大存在区間が $[0, T)$ であるならば、 $\int_0^T \|\operatorname{rot} u(s)\|_{\mathbf{bmo}} ds = \infty$ となることを示した。さらにMorrey型空間を利用し、 $\mathbf{bmo}$ より広い空間でも同様のことが成り立つことを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

水や油などの縮まない流体の運動を記述するNavier-Stokes方程式の解の性質に関する研究をおこなった。この方程式は数学のみならず、物理学、工学、気象学等の様々な自然科学の分野で利用される極めて重要な方程式である。また、同方程式の滑らかな解の大域存在は、数学の7つの未解決問題（いわゆるミレニアム問題）に選ばれており、同方程式の研究は数学分野においても重要視されていることがわかる。

研究成果の概要（英文）：We founded the weakest norm that satisfies the Brezis-Gallouet-Wainger type inequality, under some conditions. As an application of the Brezis-Gallouet-Wainger type inequality, we gave Beale-Kato-Majda type blow-up criteria of smooth solutions to the 3-D Navier-Stokes equations in unbounded domains. For example, we proved that, if  $[0, T)$  is the maximal interval of existence of a smooth solution  $u$  to the Navier-Stokes equations, then  $\int_0^T \|\operatorname{rot} u(s)\|_{\mathbf{bmo}} ds = \infty$ . Moreover, we improved this blow-up criterion by using a space of Morrey type.

研究分野：数学

キーワード：関数方程式論 偏微分方程式 流体力学

### 1. 研究開始当初の背景

水や油などの粘り気のある縮まない流体（非圧縮性粘性流体）の運動を記述する Navier-Stokes 方程式：

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p &= f, \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

に関して多くの未解決問題が残されている。この方程式は非圧縮性粘性流体の速度場  $u$  および圧力場  $p$  を未知関数とする連立の非線形偏微分方程式である。特に、考える領域の次元が 3 以上の場合、滑らかな解の時間大域可解性問題は未解決であり、この問題は数学の 7 つの未解決問題（いわゆるミレニアム問題）の一つに選ばれている。このことから Navier-Stokes 方程式が物理学、工学のみならず数学分野においても極めて重要視されている方程式であることがわかる。この方程式に関して、初期条件がある意味で大きい場合、滑らかな解が時間大域的に存在するかどうかは判っていないが、これに関連して次の Beale-Kato-Majda の爆発判定条件が知られている。時間区間  $[0, T]$  で滑らかな解  $u$  が存在し、各時刻における渦度の supremum norm が区間  $[0, T]$  で可積分であれば、すなわち、

$$\int_0^T \|\operatorname{rot} u(s)\|_{L^\infty} ds < \infty$$

であれば、滑らかな解が時刻  $T$  より先に延長できることが知られている。この Beale-Kato-Majda の爆発判定条件は、流体の存在する領域が全空間の場合には、これまで多くの改良がなされてきた。例えば、supremum norm の代わりに BMO-norm に関する条件に変えても同様のことが言えることが知られている。しかし、一般領域では、このような改良はなされていなかった。

### 2. 研究の目的

本研究では空間次元が 3 次元の場合の非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する解の正則性や一意性等の解の性質を考察する。特に上記の解の爆発判定条件を、外部領域等の一般的な領域で考察し、出来る限り改良する。また、定常解や時間周期解等の時刻マイナス無限遠から続く解の一意性も考察し、既存の結果を改良する。さらに非圧縮性粘性流に熱の効果を検討した熱対流方程式の解に対しても同様のことを考察する。

### 3. 研究の方法

関数解析学および調和解析学的手法を用いることにより、既存の結果の改良を行う。Beale-Kato-Majda の爆発判定条件の研究では、Brezis-Gallouet-Wainger の対数型不等式：

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(1 + \|f\|_X \log^\beta(\|f\|_{C^\alpha(\Omega)} + e))$$

が大きな役割を果たすが、この対数型不等式の改良をおこなう。とくに、この種の不等式を満たす最大の norm 空間を見つけ、Beale-Kato-Majda 型爆発判定条件に使われる  $L^\infty$  空間や BMO 空間を、より広い空間に置き換え、同判定条件を出来る限り弱める。

### 4. 研究成果

3 次元 Navier-Stokes 方程式の解に対する Beale-Kato-Majda 型の爆発判定条件の改良のために、Brezis-Gallouet-Wainger の対数型不等式を満たす「ある意味で」最大の norm 空間を見つけることに成功した。正確には適当な付加条件を norm 空間に課しているが、領域が全空間の場合は、この適当な付加条件は平行移動に関するノルム普遍性という極めて自然な条件であるため、全空間の場合は、見つけた空間は Brezis-Gallouet-Wainger の対数型不等式を満たす最大の空間と言っても差し支えない。この空間は Vishik が今世紀初頭に 2 次元 Euler 方程式の一意大域可解性を示す際に導入したものを少し修正した空間であり、我々はこれを Vishik 型空間と名付けた。一方で、領域が全空間ではなく、外部領域等の一般的な領域の場合でも、Brezis-Gallouet-Wainger の対数型不等式を満たすある意味で最大の norm 空間  $X$  を見つけた。ここでは、付加条件として、平行移動に関する普遍性のみならず、lattice 性（すなわち  $\|f(x)\| \leq \|g(x)\|$  a.e. のとき  $\|f\|_X \leq \|g\|_X$  となる）を仮定している。この条件は、Sobolev 空間等の空間では成り立たないが、ルベーグ空間やローレンツ空間等の非常に多くの関数空間では成り立つ。このような条件下で求めたある意味で最大の関数空間は、

重み付きの Morrey 型の空間となることがわかった。この Brezis-Gallouet-Wainger の対数型不等式を満たすある意味で最大となる norm 空間  $X$  を  $L^{\infty}$  の代わりに用いることにより、Beale-Kato-Majda 型の爆発判定条件の改良に成功した。とくに、これまであまり研究されていなかった、考える領域が全空間でない外部領域等の一般的な領域の場合でも Beale-Kato-Majda 型の爆発判定条件の改良に成功した。我々が導入した norm 空間は、Brezis-Gallouet-Wainger の対数型不等式を満たす最大の空間であるため、この結果は、Brezis-Gallouet-Wainger の対数型不等式を利用する既存の手法を用いる限りにおいて、最良のものと思なせる。

さらに Navier-Stokes 方程式の弱解の正則性に関して、Serrin 型の正則条件が有名である。Navier-Stokes 方程式の弱解は時間大域的に存在することが知られているが、解の正則性と一意性は未解決である。Serrin 型正則条件とは大雑把に述べると Navier-Stokes 方程式の弱解  $u$  が  $2/s+3/q \leq 1$  を満たすある  $(q,s)$  に対し

$$u \in L^s(0,T; L^q)$$

となるならば、解  $u$  は滑らかであるというものである。我々はこの条件の端点の場合の条件

$$u \in L^2(0,T; L^{\infty})$$

を改良することにも成功し、Beale-Kato-Majda 型判定条件と同様に、 $L^{\infty}$  空間を  $BMO$  よりもさらに広い空間に置き換えることが出来た。ここでも、Brezis-Gallouet-Wainger の対数型不等式を満たす最大の norm 空間  $X$  を用いており、Brezis-Gallouet-Wainger の対数型不等式を利用する既存の方法では、最良とみなせる結果となっている。

また、Navier-Stokes 方程式の定常解や時間周期解のような時刻マイナス無限遠から続く解

$$u \in BC((-\infty, \infty); L^3) \quad (\text{ここで } L^3 \text{ は弱 } L^3 \text{ 空間である})$$

の一意性に関して、我々はすでに下記のような結果を得ている。大雑把に言うと、同じデータに対し 2 つの解  $u, v$  が存在したとし、 $u$  と  $v$  のどちらか一方が小さければ、両者は一致することを証明している。本研究では、非圧縮性粘性流に熱の影響を考慮した熱対流方程式に対して、同様の一意性が成り立つかどうか研究し、次の結果を得た。すなわち、2 つの解  $(u, \theta_1)$  と  $(v, \theta_2)$  が存在したとし ( $\theta_1$  と  $\theta_2$  は温度分布を表す未知関数である) どちらか一方のペア (例えば  $(u, \theta_1)$ ) が小さければ、2 つの解  $(u, \theta_1)$  と  $(v, \theta_2)$  は一致することを証明した。さらに、もし、流体にかかる力が、浮力  $g \theta$  のみのとき、 $\theta_1$  の小ささの仮定のみで一意性が示せることがわかった。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Nakao Kohei, Taniuchi Yasushi	4. 巻 176
2. 論文標題 An alternative proof of logarithmically improved Beale-Kato-Majda type extension criteria for smooth solutions to the Navier-Stokes equations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 48 ~ 55
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2018.05.018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Nakao Kohei, Taniuchi Yasushi	4. 巻 359
2. 論文標題 Brezis-Gallouet-Wainger Type Inequalities and Blow-Up Criteria for Navier-Stokes Equations in Unbounded Domains	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 951 ~ 973
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-017-3061-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 K. Nakao, Y. Taniuchi	4. 巻 2009
2. 論文標題 Brezis-Gallouet-Wainger type inequalities and blow-up criteria for Navier-Stokes equations in bounded domains	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 数理研究録	6. 最初と最後の頁 44-52
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 K. Nakao, Y. Taniuchi	4. 巻 710
2. 論文標題 Brezis-Gallouet-Wainger type inequality and its application to the Navier-Stokes equations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Contemp. Math.	6. 最初と最後の頁 211-222
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 FARWIG Reinhard、SCHULZ Raphael、TANIUCHI Yasushi	4. 巻 47
2. 論文標題 Spatial Asymptotic Profiles of Solutions to the Navier-Stokes System in a Rotating Frame with Fast Decaying Data	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 501-529
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14492/hokmj/1537948828	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計8件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Taniuchi, Y.
2. 発表標題 Some logarithmic inequalities and the Navier-Stokes equations
3. 学会等名 第21回北東数学解析研究会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Taniuchi, Y.
2. 発表標題 Some logarithmic inequalities and the Navier-Stokes equations
3. 学会等名 松山解析セミナー2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Taniuchi, Y.
2. 発表標題 Some logarithmic inequalities and the Navier-Stokes equations
3. 学会等名 Maximal regularity and nonlinear PDE (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Y. Taniuchi
2. 発表標題 Brezis-Gallouet-Wainger type inequality and its application to Navier-Stokes equations in unbounded domains
3. 学会等名 VORTICITY, ROTATION AND SYMMETRY (IV) - Complex Fluids and the Issue of Regularity (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Y. Taniuchi
2. 発表標題 Brezis-Gallouet-Wainger type inequality and its application to the Navier-Stokes equations
3. 学会等名 保存則をもつ偏微分方程式に対する解の正則性, 特異性および漸近挙動の研究 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Y. Taniuchi
2. 発表標題 Brezis-Gallouet-Wainger type inequalities and blow-up criteria for Navier-Stokes equations in unbounded domains
3. 学会等名 New trends in Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Y. Taniuchi
2. 発表標題 Brezis-Gallouet-Wainger type inequality and its application to Navier-Stokes equations in unbounded domains
3. 学会等名 第六回弘前非線形方程式研究会 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Y. Taniuchi
2. 発表標題 Uniqueness of solutions bounded on whole time axis to the Boussinesq equations in unbounded domains
3. 学会等名 RIMS 共同研究「非圧縮性粘性流体の数理解析」(招待講演)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Mathematical Fluid Mechanics and Related Topics	開催年 2018年～2018年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------