様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　２ 年　　７ 月 １４ 日現在

機関番号：１６４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ０５２３５

研究課題名（和文）分散型写像流方程式の初期値問題に対する幾何解析の展開

研究課題名（英文）Developments in Geometric Analysis of the initial value problem for dispersive flow equation

研究代表者
小野寺　栄治（Onodera, Eiji）

高知大学・教育研究部自然科学系理工学部門・准教授

研究者番号：７０５３２３５７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：数理物理学において、実2次元単位球面上の曲線流がみたす4階の非線型分散型偏微分方程式が現れる。ここ10年程で、その方程式の幾何学的一般化が提案され、コンパクト定曲率リーマン面上の閉曲線流に対する問題設定において、その初期値問題の滑らかな時間局所解が一意的に存在することが本研究者により示された。本研究では、上記の物理モデルに対する新たな幾何学的一般化を行った。更に、コンパクトな局所エルミート対称空間上の閉曲線流に対する問題設定において、その初期値問題の滑らかな時間局所解が存在することを示した。その他、球面値曲線流がみたすある5階の分散型偏微分方程式の初期値問題の解法研究等も進めた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
Ding-Wang(2018, Math.Z)により、リーマン多様体からケーラー多様体への写像流に対する幾何学的偏微分方程式が提案され、その解は(シュレーディンガー写像流の自然な高階版という意味で)一般化2重シュレーディンガー写像流と呼ばれる。本研究の4階の分散型方程式に対する成果は、写像流の定義域が1次元（つまり曲線流）という限定的設定化ではあるが、一般化2重シュレーディンガー写像流の存在を保証した初めての成果と言える。今後は解の一意性や空間高次元化に関する研究への進展が期待される。また、5階の分散型方程式に対する成果は、任意奇数階の分散型方程式の場合への拡張が期待される。

研究成果の概要（英文）：A fourth-order nonlinear dispersive partial differential equation arises in mathematical physics, the solution of which is a curve flow on the two-dimensional unit sphere. In recent ten years, a geometric generalization of the physical model has been proposed.In particular, by the present researcher, local existence and uniqueness of a smooth solution to the initial value problem was established under the assumption that the solution is a closed curve flow on a compact Riemann surface with constant curvature. In this research, a new geometric generalization of the physical model was introduced. Moreover, local existence of a solution to the initial value problem was obtained under the assumption that the solution is a closed curve flow on a compact locally Hermitian symmetric space. In addition, the initial value problem for a fifth-order dispersive equation for curve flow on the sphere was also handled.

研究分野：偏微分方程式，幾何解析

キーワード：高階分散型偏微分方程式　２重シュレーディンガー写像流　局所エルミート対称空間　時間局所解の一意存在

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

1990 年代後半以降、ある種の概エルミート多様体に値を取る写像流（あるいは曲線流）がみたす非線型分散型偏微分方程式の具体例に対する研究が、偏微分方程式論、幾何解析、可積分系理論、数理物理学などの様々な視点から進められつつあった。この方面では、写像流がみたす２階の分散型偏微分方程式と曲線流がみたすある３階の分散型偏微分方程式に対して初期値問題の解法研究が進んでいた。特に、解が値を取る多様体としてコンパクトケーラー多様体を設定すると、時間局所解の存在が容易に従うことが知られていた。一方で、４階以上の高階の方程式を扱うためには、方程式の低階項の構造が複雑化するため、初期値問題の可解性と解が値を取る多様体の幾何学的構造との関係をより精密に解析する必要性があった。実際、本研究代表者はコンパクトな定曲率リーマン面に値を取る閉曲線流がみたすある４階非線型分散型偏微分方程式（以下、方程式 A と呼ぶ）の初期値問題に対する時間局所解の一意存在を示したが、この多様体に対する定曲率条件の緩和は本質的に困難であることが指摘されていた。なお、この方程式 A は、ある古典スピン系の連続極限モデル（Physics Letters A,1988）や渦糸運動モデル(Journal of Fluid Mechanics, 2000)と関係した実２次元球面値の曲線流がみたす方程式の１つの幾何学的一般化に相当する。また、この他にも広い意味での幾何学的分散型偏微分方程式で興味深い研究対象が、数理物理学や可積分系理論との関連において幾つか存在していた。

２．研究の目的

以下では、リーマン多様体から概エルミート多様体への時間パラメータ付き写像流がみたす分散型偏微分方程式を分散型写像流方程式と総称する。本研究の目的は、幾つかの分散型写像流方程式の具体例に対する初期値問題を考察し、時間局所解の存在や一意性、時間大域的延長可能性について明らかにすることである。

もう少しだけ具体的に述べる。この方面では、古典スピン系の連続極限や３次元空間内の渦糸運動との関連で、実２次元球面に値を取る曲線流がみたす分散型写像流方程式の例が現れることがよく知られている。本研究では、この実２次元球面をより一般のケーラー多様体や概エルミート多様体に設定しなおして方程式を幾何学的に一般化したうえで考察する。それによって、考察する偏微分方程式の偏微分方程式系としての構造と多様体の幾何学的構造との関係を解明し、初期値問題のソボレフ空間における一意可解性に関する成果につなげることを目指す。研究当初の段階で特に念頭にあった考察対象は、閉曲線流がみたすある４階の分散型写像流方程式とその空間高次元版、および、これまで手付かずであったある２階の分散型写像流方程式などであった。

３．研究の方法

考察する分散型写像流方程式の偏微分方程式としての構造と多様体の幾何学的構造との関係を見通し良く理解するためのアプローチとして、以下の２つが考えられる。

- 分散型写像流方程式の解の高階共変微分がみたす偏微分方程式を計算する
- 写像流に沿う標構場を用いて、元の方程式をベクトル値関数の分散型偏微分方程式系に簡略化する

前者の方法は、小磯憲史氏の先駆的研究(Osaka Journal of Mathematics, 1997)以降、この分野における標準的方法となっている。写像流の誘導束の断面に対する幾何学的ソボレフノルムを用いたエネルギー評価と組み合わせて使用することにより、解の存在証明に直接的に応用できることが期待される。一方、後者の方法は、渦糸の方程式から非線型シュレーディンガー方程式への変換の手続きを与えた橋本変換(Journal of Fluid Mechanics, 1972)を起源に持ち、Chang-Shatah-Uhlebeck(Communications on Pure and Applied Mathematics,2000)などによって実用化された方法である。直接的に分散型写像流方程式の解法を与えるとは限らないが、広範的に研究が進んでいる複素数値関数がみたす非線型分散型偏微分方程式及びその系に対する知見と比較しながら理解を深められることが期待できる。これらをバランスよく併用しながら問題解決に取り組む。

分散型写像流方程式の初期値問題の解の存在を示すためには、上でも述べたように写像流の誘導束の断面に作用する幾何学的ソボレフノルムを用いたエネルギー法を利用する方法が基本的である。ただし、いわゆる可微分性の損失による困難が伴うので、それを克服できるかどうかが鍵となる。解の一意性を示すためには、二つの解の導関数同士の差をどのように定義するかによってアプローチの仕方が変わってくるが、平行移動を用いて誘導束の断面として差を定義するアプローチか、あるいは、ナッシュの等長埋め込みを用いてベクトル値関数として差を定義するアプローチを用いることを考える。

もう少し具体的に述べると、まず、上記の閉曲線流がみたす４階分散型写像流方程式 A の定式化の仕方を見直すところから始め、幾何学的により自然な枠組みで初期値問題の一意可解性を得られないか調べる。次の段階として、この曲線流に対する研究を写像流に対する研究に発展させること（空間の高次元化）を試みる。更に、これらを通じて得られた知見や構築した方法を、その他の広い意味での幾何学的分散型偏微分方程式に対する初期値問題の解法研究に応用することを試みる。必要に応じて、論文や書籍等を通じて偏微分方程式論や幾何解析における最新の知識や方法を習得するなどして、問題解決をはかる。

４．研究成果

(1)　　コンパクトな定曲率リーマン面に値をとる閉曲線流に対する４階分散型写像流方程式 A の初期値問題が時間局所的に一意可解であることの証明を与えた論文が査読付き雑誌(Journal of Geometric Analysis, 2017)に掲載された。この方程式 A は解が値を取る多様体のリーマン計量、複素構造、レビ・チビタ接続を用いて定式化されていた。そこで、リーマン計量の代わりに曲率テンソルを用いて方程式Ａを修正することにより、新たに曲線流がみたす４階非線型分散型偏微分方程式（以下、方程式Ｂと呼ぶ）を導出した。さらに、閉曲線流の場合に対する初期値問題を考察した。そして、解が値を取る多様体としてコンパクトな局所エルミート対称空間を設定すると、方程式Ｂの初期値問題に対する滑らかな時間局所解が存在することを示した。実際、解の高階共変微分がみたす偏微分方程式を計算したところ、古典的エネルギー法が破綻する（いわゆる可微分性の損失が起きる）ことがわかったが、多様体の局所エルミート対称性とケーラー性を利用してその原因を特定し、ある種の古典的エネルギーに対する修正を行うことにより、問題の解決につなげた。方程式Ｂに対するこの結果は、複素グラスマン多様体やコンパクトなエルミート対称空間など、方程式Ａに対する先行結果よりも広い枠組みの多様体を含んでおり、幾何学的によりきれいな結果であると思われる。証明そのものは、千原浩之氏(Bulletin of the London Mathematical Society,2013)によって開発された幾何学的エネルギー法とゲージ変換の方法との融合的解法に習っているという意味では、方程式 A に対する証明方法と本質的に大差はない。興味深いのは、いわゆる一般化２重シュレーディンガー写像流方程式との関連である。一般化２重シュレーディンガー写像流方程式は Ding-Wang(Mathematische Zeitschrift,2018)によって提唱された幾何学的偏微分方程式の一種である。一般有限次元のユークリッド空間（または平坦トーラス）からコンパクト局所エルミート対称空間への一般化２重シュレーディンガー写像流方程式の具体形を求めたところ、特に空間１次元の場合はその方程式が方程式Ｂに帰着されることがわかった。従って、本研究でえられた成果は、一般化２重シュレーディンガー写像流方程式の初期値問題に対する時間局所解の構成に初めて成功したものであるという言い方もできる。これらの結果に関しては、国内の幾つかの研究集会で報告する機会をいただいた。また、これらの結果をまとめた論文を執筆し、査読付き雑誌(Differential Geometry and its Application,2019)に掲載された。

　　次に、その解の一意性について考察した。ナッシュの等長埋め込みを用いて、コンパクトな局所エルミート対称空間を十分次元の高いユークリッド空間に埋め込んで、二つの解やその導関数同士の差を定義したうえで、それらがみたす偏微分方程式系の解析やそのエネルギー評価を試みた。当初は局所エルミート対称性の使い方の検討に手間取ったが、少し簡単なモデルとして多様体の正則断面曲率が一定の場合を観察するなどしながら再考し、局所エルミート対称空間をユークリッド空間に埋め込んで計算するために必要と思われる道具は全て準備することができたと思われる。近い将来に解の一意性は肯定的に解決されると期待される。

　　また、写像流の定義域を実数直線、値を取る多様体を正則断面曲率一定のケーラー多様体と設定したうえで、写像流に沿う標構場を用いて方程式 B からある４階の非線型分散型偏微分方程式系の形への簡略化を与えた。ケーラー多様体の複素次元が２以上の場合における簡略化後の方程式系はいわゆる非局所項も有しているなど、興味深い構造であることがわかった。

　　その他に、測地線や定値曲線のような自明解を除く方程式 B の定常解の一例の構成を行った。ただし、多様体や方程式の係数に対する極めて限定的な設定下で非自明な定常解を構成できることがわかったに過ぎず、より踏み込んだ考察が必要であると思われる。

(2)　　山﨑遥氏（高知大学大学院修士課程(2017-2018 年度)）と、実２次元球面に値を取る曲線流がみたすある５階の非線型分散型偏微分方程式に対する初期値問題を考察した。Anco-Myrzakulov(Journal of Geometry and Physics, 2010)によって、１次元のハイゼンベルグスピン系の連続体近似モデルを含む完全可積分系方程式の系列が与えられた。この系列の中のちょうど２階の方程式は、シュレーディンガー写像流方程式とよばれる良く知られた分散型写像流方程式である。この系列のうちで４階までの偏微分方程式については先行研究において初期値問題の解法が与えられていた。本研究では、その次の段階として、この系列に含まれる５階の分散型偏微分方程式の初期値問題に対する時間局所解の一意存在問題を考察した。具体的には以下の成果を得た。

① 解の空間変数の定義域が実数直線の場合、すなわち閉じていない曲線流の場合を考察し、分散型偏微分方程式の解の平滑化効果を利用することにより、時間局所解の存在と一意性が従うことを示した。

② 閉曲線流の場合は、上記の平滑化効果を期待できないという意味で、①の閉じていない曲線流の場合よりも本質的に難しい問題設定になるが、方程式の構造をより詳しく解析することにより、①と同じ結果が得られることを示した。

これらは、本質的な部分では既存の解法が適用可能であったため、斬新な結果であるとは言い切れないが、本質的ではないものの階数を５階まで上げたことによって初めて現れた困難もあった。今後はこれらの結果を任意奇数階の場合に拡張したり、幾何学的に一般化したりするなどの研究の方向性も考えられる。

(3)　以下の研究集会を開催した。

① 『 第１回　解析学の壺 』平成 30 年 12 月 15 日（沖縄県市町村自治会館)

② 『 スペクトル・散乱　那覇シンポジウム』2020 年 1 月 14 日-15 日（沖縄県市町村自治会館)

これら二つはいずれも千原浩之氏（琉球大学）と貝塚公一氏（日本医科大学）との共催として開催したものである。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Eiji Onodera	４．巻 67
２．論文標題 Local existence of a fourth-order dispersive curve flow on locally Hermitian symmetric spaces and its application	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Differential Geometry and its Applications	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2019.101560	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

１．著者名 Eiji Onodera	４．巻 27
２．論文標題 A fourth-order dispersive flow equation for closed curves on compact Riemann surfaces	５．発行年 2017年
３．雑誌名 The Journal of of Geometric Analysis	６．最初と最後の頁 3339-3403
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1007/s12220-017-9808-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 小野寺栄治
２．発表標題 A fourth-order dispersive flow of closed curves on a compact Riemann surface
３．学会等名 研究集会「微分方程式の総合的研究」，京都大学
４．発表年 2018年

１．発表者名 小野寺栄治
２．発表標題 閉リーマン面上の閉曲線流がみたす４階分散型偏微分方程式の初期値問題(I)，(II)
３．学会等名 研究集会「第1回 筑波 RCMS 解析学シンポジウム」，沖縄県市町村自治会館
４．発表年 2019年

１．発表者名 小野寺栄治
２．発表標題 A fourth-order dispersive flow of closed curves on a compact Riemann surface
３．学会等名 研究集会「第11回名古屋微分方程式研究集会」，名古屋大学
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

http://www.math.kochi-u.ac.jp/onodera/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考