

令和 6 年 5 月 28 日現在

機関番号：24405

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2023

課題番号：16K05238

研究課題名(和文)非線形微分方程式の定性解析の新機軸：非線形振動理論の新たな局面を迎えて

研究課題名(英文)Innovation in Qualitative Analysis of Nonlinear Differential Equations: Entering a New Phase of Nonlinear Oscillation Theory

研究代表者

谷川 智幸 (TANIGAWA, Tomoyuki)

大阪公立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10332008

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：非線形 Sturm-Liouville 微分作用素(非中立型)あるいは中立型微分作用素(遅れあるいは進みの関数変数を含んだ)主要部とする種々の微分方程式やそれらの方程式系に対して、(a) 非線形微分方程式の振動性の特徴付け、(b) 非振動型の微分方程式に非摂動項を付加したときの解への影響、(c) 様々な微分方程式の非振動性(非振動解の存在と無限遠における漸近挙動)を解析するための正則変動関数論の活用、(d) 非振動解の存在など貴重な情報を提供する非線形 Riccati 方程式と非線形微分方程式の非振動性との関連、という主に4つの課題に焦点当てた研究を実施した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究課題の学術的意義：非線形微分方程式の振動理論は、自然現象や社会現象を記述する数理モデル(非線形微分方程式)の解の全体構造を解明することを目標に世界各国で長年研究されてきた分野である。その振動理論の進展に大きく寄与することができたと思える。また、本来、非線形微分方程式に対する解は具体的に表現することができないため、上述のような振動理論を駆使して解の性質を捉えることが最善の手法になっている。本研究の社会的意義：歴史のある振動理論を活用することによって、多種多様な微分方程式の解の特徴を入手することに成功することができ、科学及び文明の進展に大きく貢献したと思われる。

研究成果の概要(英文)：Nonlinear Sturm-Liouville differential operators (both non-neutral and neutral types) and their associated systems of differential equations: (a) Characterization of oscillatory behavior in nonlinear differential equations, (b) Effect of adding a non-perturbative term to a differential equations of non-oscillatory types, (c) Utilization of Regular Variation Theory for analyzing non-oscillatory solutions of various differential equations. Regular variation functions are a general term for a family of classes of functions classified according to certain criteria. (d) Relationship between non-oscillatory solutions of nonlinear differential equations and nonlinear Riccati equations, which provide useful informations such as the existence of non-oscillatory solutions. Explored the connection between non-oscillatory solutions of nonlinear differential equations and solutions of nonlinear Riccati equations. Provided valuable insights into the existence of non-oscillatory solutions.

研究分野：数物系科学

キーワード：微分方程式の振動理論 非線形微分方程式の振動理論 正則変動関数論

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

すべての正値解の存在と無限遠点における漸近挙動を完全にしかも正確に把握することができる、そんな常微分方程式や方程式系が存在するだろうかと自問し、実験的に計算を試みたところ、解を1930年にセルビアの J. Karamata によって創始された正則変動関数論の範疇で考察すれば成功に導く、幾つかの興味ある具体例を発見することができた。その結果に基づいて、そのような微分方程式 - 数理物理学に現れる非線形微分方程式に焦点を当てる - のクラスを出来るだけ拡大し、その成果を正則変動関数論の微分方程式への応用 - 非線形振動理論の新たな局面からの解析 - という観点から体系的理論として構築すること、それを目標に研究活動を精力的に実施することを当初の目標としていた。

2. 研究の目的

研究課題「非線形微分方程式の定性解析の新機軸：非線形振動理論の新たな局面を迎えて」を遂行するために、非線形 Sturm-Liouville 微分作用素（非中立型）あるいは中立型微分作用素（遅れあるいは進みの関数変数を含んだ）を主要部とする種々の微分方程式やそれらの方程式系に対して、(a) 非線形微分方程式の振動性の特徴付け、(b) 非振動型の微分方程式に非摂動項を付加したときの解への影響、(c) 様々な微分方程式の非振動性（非振動解の存在と無限遠における漸近挙動）を解析するための正則変動関数論の活用（正則変動関数とは、1930年にセルビアの J. Karamata によって創始されたある基準に従って分類されたクラスの関数族の総称である）、(d) 非振動解の存在など貴重な情報を提供する非線形 Riccati 方程式と非線形微分方程式の非振動性との関連、という主に4つの課題に焦点当てた研究を行った。

3. 研究の方法

先行研究の情報収集と情報交換の実施：宇宙物理学や原子物理学に現れる非線形数理モデル（非線形微分方程式及び方程式系）に対して、既に知られている既存の結果を体系的に纏め、証明に利用されている数学的な手法や数値解析をはじめとする物理的な手法を網羅し、可能な限り援用できるようにするための情報収集を行った。情報収集に関しては、インターネットが主であったが、最も価値があり先見的な研究成果の予想ができたのが、同分野の国内外の研究者からの情報であった。

4. 研究成果

本研究の実施において得られた新しい結果及び新しい情報は主に次のようなものである。

(1) 1階半線形連立微分方程式の非振動解の全体構造を明らかにしている。具体的には、方程式の主要部にある連続関数の積分発散あるいは積分収束という各々の条件のもとで非振動解の無限遠における漸近挙動に従って、最大解、最小解、有界解に分類し、それらの存在について議論した。方程式系の非振動解の構成には、Riccati テクニックと Schauder-Tychonoff の不動点定理を援用している。

(2) 4階半線形微分方程式のすべての非自明な解が振動であるための十分条件を求めている。具体的には、摂動項にある係数関数に関する2重積分が発散すれば、すべての解は無限遠点まで零点をもつことを示している。

(3) 2階線形 Sturm-Liouville 微分方程式に対する非振動解の存在定理を確立している。具体的には、方程式の係数関数による2種類の Riccati 方程式を用いて非振動解の存在とその漸近挙動を示している。また、線形微分方程式に対して得られた結果を半線形微分方程式に拡張している。

(4) 2階半線形微分方程式の振動解の零点における勾配と振幅の情報を得ている。現在に至るまで振動解そのものの情報を与える結果は皆無であったが、この度斬新な結果を得ることに成功した。具体的には、振動解とその導関数を関連付ける数式を立式し、その数式を最大限に活用して零点における勾配と振幅の情報を入手し、さらに例も挙げている。

(5) $p(t)$ -Laplacian をもつ2階準線形微分方程式の非振動解を無限遠における漸近挙動によって分類し、その各々タイプの存在定理を確立している。

(6) 2階準線形連立微分方程式の中間増大解あるいは中間減少解の存在を正則変動関数論の

範疇で考察しそれらの存在条件を確立している. また, 得られた結果を外部領域における p -Laplace operators を含む Metaharmonic 方程式やその方程式系の偏微分方程式に応用している.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 6件 / うちオープンアクセス 13件）

1. 著者名 K. Fujimoto, M. Hamaoka and T. Tanigawa	4. 巻 90
2. 論文標題 Asymptotic analysis of solutions of second order quasilinear differential equations with variable exponents of nonlinearity	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1 - 13
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 J. Jaros, T. Kusano and T. Tanigawa	4. 巻 128
2. 論文標題 Extreme and moderate solutions of nonoscillatory second order half-linear differential equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annales Polonici Mathematici	6. 最初と最後の頁 49 - 85
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 J. Jaros, T. Kusano and T. Tanigawa	4. 巻 2021
2. 論文標題 Oscillatory properties of solutions of second order half-linear differential equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 IWQUALITDE	6. 最初と最後の頁 83-86
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 J. Jaros, T. Kusano and T. Tanigawa	4. 巻 2020
2. 論文標題 Structure of nonoscillatory solutions of second order half-linear differential equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 IWQUALITDE	6. 最初と最後の頁 99-101
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 J. Jaros, T. Kusano and T. Tanigawa	4. 巻 2020
2. 論文標題 Viewing nonoscillatory second order linear differential equations from the angle of Riccati equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 arXiv:2006.11592v1 Cornell University	6. 最初と最後の頁 1-27
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 J. Jaros, T. Kusano and T. Tanigawa	4. 巻 56
2. 論文標題 Oscillation criteria for fourth order half-linear differential equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Archivum Mathematicum (Brno)	6. 最初と最後の頁 115-125
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5817/AM2020-2-115	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Tomoyuki Tanigawa	4. 巻 2019
2. 論文標題 Asymptotic analysis of two-dimensional cyclic systems of first order nonlinear differential equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 IWQUALITDE	6. 最初と最後の頁 193-197
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 J. Jaros, T. Kusano and T. Tanigawa	4. 巻 92
2. 論文標題 Nonoscillatory solutions of planar half-linear differential systems: a Riccati equation approach.	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 28 pp.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 J. Jaros, T. Kusano and T. Tanigawa	4. 巻 2018
2. 論文標題 Productivity of Riccati differential equations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 IWQUALITDE	6. 最初と最後の頁 67-71
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Tomoyuki Tanigawa	4. 巻 2017
2. 論文標題 Existence of rapidly varying solutions of second order half-linear differential equations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 IWQUALITDE	6. 最初と最後の頁 188-192
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 谷川智幸	4. 巻 2032
2. 論文標題 Asymptotic analysis of positive solutions of a class of nonlinear differential equations in the framework of regular variation	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 京大数理解析研究所「常微分方程式の定性的理論とその周辺」数理解析研究所講究録,	6. 最初と最後の頁 11-20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 谷川智幸, 井上直哉, 澁谷明人	4. 巻 34
2. 論文標題 数理モデルの援用による数学授業開発	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 熊本大学教育実践研究	6. 最初と最後の頁 37-45
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 J. Jaros, T. Kusano and T. Tanigawa	4. 巻 328
2. 論文標題 Regularly varying solutions with intermediate growth for cyclic differential systems of second order	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Electron Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 28 pp.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 J. Jaros, T. Kusano and T. Tanigawa
2. 発表標題 Oscillatory properties of solutions of second order half-linear differential equations
3. 学会等名 International Workshop QUALITDE (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 谷川智幸
2. 発表標題 Riccati 方程式を用いる半分線形微分方程式の非振動解の研究
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 谷川智幸
2. 発表標題 Existence and precise asymptotic behavior of positive solutions of scalar and systems of nonlinear differential equations
3. 学会等名 第42回南大阪応用数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tomoyuki Tanigawa
2. 発表標題 Existence and asymptotic behavior of positive solutions of second order half-linear functional differential equations in the framework of regular variations
3. 学会等名 Conference on Differential and Difference Equations and Applications 2017, Jasna, Slovakia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 谷川智幸
2. 発表標題 正則変動関数論を活用した非線形微分方程式の漸近解析
3. 学会等名 なかもず解析セミナー (大阪府立大学) (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 谷川智幸
2. 発表標題 ある非線形連立微分方程式の強減衰解と強増大解の存在について
3. 学会等名 愛媛大学における微分方程式セミナー (愛媛大学)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 谷川智幸
2. 発表標題 ある非線形関数微分方程式の一般化された緩変動解と指数1の正則変動解の存在について
3. 学会等名 富山解析セミナー (富山大学:第178回APセミナー) (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 谷川智幸
2. 発表標題 正則変動関数論と微分方程式の解の漸近挙動
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会（特別講演）（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 谷川智幸
2. 発表標題 ある非線形微分方程式の正值解の漸近挙動について
3. 学会等名 常微分方程式の定性的理論ワークショップ（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Tomoyuki Tanigawa
2. 発表標題 Existence of regularly varying solutions of a class of third order nonlinear differential equations
3. 学会等名 富山解析セミナー（第177回APセミナー）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Tomoyuki Tanigawa
2. 発表標題 Asymptotic analysis of positive solutions of a class of nonlinear differential equations in the framework of regular variation
3. 学会等名 Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations and Related Area（招待講演）
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 RIMS Workshop Succession and Innovation of Studies on ODEs in Real Domains	開催年 2017年～2017年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
スロバキア	Comenius University			
セルビア	University of Nis			