

令和元年5月24日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05240

研究課題名(和文) 変分問題、最適化問題と非線形偏微分方程式の総合的研究

研究課題名(英文) Study on variational problems, optimization problems and nonlinear partial differential equations

研究代表者

倉田 和浩 (KURATA, Kazuhiro)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号：10186489

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：パターン形成の数学的研究の話題において、3種のFitzHugh-Nagumo反応拡散系に付随する非線形変分問題の有界領域上のエネルギー最小化解の微細構造、安定性やエネルギー評価の研究を推進するとともに、空間非一様な係数をもつFitzHugh-Nagumo反応拡散系のヘテロクリニック解の特異摂動問題におけるエネルギー漸近展開公式を確立した。また、化学反応現象に現れる空間非一様項をもつSchnakenbergモデルの対称な1点ピーク状定常解の構成と安定性の研究を漸近解析により行い、その空間非一様環境効果がもたらす安定性への影響を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

生命現象や物理現象等における興味深いパターン形成の起こる数理的メカニズムを解明することは、数値シミュレーションによる解析も含め、様々な研究アプローチがあり学際的な研究分野である。その中で、本研究は、特に非線形数理モデルの厳密な数学的解析による定量的評価を行いパターン形成のメカニズムを明らかにするもので、学術的意義が高い。また、現象における環境効果は数理モデルである非線形微分方程式の係数の空間非一様性として現われ、その環境効果がパターン形成及びその安定性を制御するメカニズムを解明することにもなり、社会的意義が大きい。

研究成果の概要(英文)：In the research of pattern formations from mathematical viewpoint, we studied the structure of energy minimizers of the associated nonlinear variational problem for the 3-component FitzHugh-Nagumo reaction-diffusion system, especially the micro-structure, precise energy estimates and their stability. We also established the precise asymptotic energy formula of heteroclinic solutions of the FitzHugh-Nagumo system in the singular perturbation problem. Moreover, in the study of the Schnakenberg mathematical model describing a chemical reaction phenomenon, we constructed one-peak stationary solution and revealed the effect of the heterogeneous coefficient to its stability by using asymptotic analysis.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：変分問題 最適化問題 固有値問題 非線形楕円型偏微分方程式 パターン形成

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 生命現象や化学反応の現象におけるパターン形成のメカニズムを反応拡散系と呼ばれる非線形偏微分方程式(系)で記述される数理モデルの解析を通して解明しようとする数理科学的研究は膨大な蓄積があり、今なお活発に研究されている学際的研究分野である。そうした数理モデルの中でも、数理生態学の形態形成を記述する Gierer-Meinhardt 系や交差拡散も含めた個体増殖数理モデルのロトカ・ボルテラ系や走化性数理モデルにおけるパターン形成の数学的研究は近年めざましい進展がなされている。それらの数学的研究において、1つの大きな興味は、空間一様な数理モデルからいかに安定な空間非一様なパターンが発生するのかという問いに、A. Turing が提唱した拡散誘導不安定というメカニズムの数学的検証であった。そうした中、環境効果を取り入れた空間非一様な数理モデルにおいて、いかに環境効果がパターン形成およびその安定性に影響を与えるかという問題は、自然であり最近活発な研究が始まりつつある。単独の反応拡散方程式においては、アリ効果と呼ばれる非線形効果と環境効果の組み合わせにより、多様な安定定常パターンが生成しうることを、研究代表者は研究協力者の1人でもある田中和永氏(早稲田大学)らと共に研究した実績もある。このような背景の中で、本研究課題の1つとして、そうした環境効果を、数理生理学の神経細胞のパルスの伝播を記述する FitzHugh-Nagumo 系や、化学反応現象を記述する Schnakenberg モデル等において、厳密な数学解析によって明らかにしていきたいという動機があった。

(2) 近年、細い領域上でのラプラシアン作用素の Dirichlet-Neumann 混合境界条件下での固有値の詳細な漸近挙動を、研究協力者の1人でもある神保秀一氏(北大)と研究したが、細い領域に閉じ込められた量子的粒子の束縛状態のエネルギー研究する Quantum waveguide 問題と密接に関係があり、領域の幾何学の影響と関係があるという数学的にも興味深い研究対象である。その研究の発展として、境界の一部(Neumann 窓という)にだけ Neumann 境界条件を課した場合の固有値の漸近挙動を調べることは、基底エネルギーを最小にする Neumann 窓の最適位置を特定する最適化問題を解明することでもあり、本研究課題の大きな動機となっている。

(3) 非線形光学やボーズ・アインシュタイン凝縮などの量子現象を記述する非線形シュレディンガー方程式(系)は、自己相互作用、多成分との相互作用および外部ポテンシャルとの相互作用を記述しており、いかに量子力学的粒子の凝集現象、凝集位置、漸近的プロファイルに影響を与えるかを調べることは数学的にも、変分問題として大変興味深い話題となっている。研究協力者の1人でもある柴田将敬氏(東工大)とは、以前にもこうした問題で議論した経緯もあり、特に量子グラフ上の変分問題の解の凝集状態の研究への動機を持ち続けている。

2. 研究の目的

生命現象や物理現象等における興味深いパターン形成の起こる数理的メカニズムを解明することは、様々な研究アプローチがあり学際的な研究分野である。本研究は、いくつかの興味深い現象を記述する非線形偏微分方程式(系)の厳密な数学的解析による定量的評価を行いパターン形成のメカニズムを明らかにするものである。また、現象における環境効果は数理モデルである非線形偏微分方程式の係数の空間非一様性として現われ、その環境効果がパターン形成及びその安定性を制御するメカニズムを解明することにもなる。こうした環境効果の解の構造への影響を、厳密な数学解析を用いて解き明かすことを目的とするものである。

3. 研究の方法

変分法、スペクトル解析、調和解析および偏微分方程式などの観点から、偏微分方程式の解の構造の研究、固有値問題や非線形楕円型境界値問題等における最適化問題、数理生態学、化学反応や量子現象におけるパターン形成のメカニズムの解明を、厳密な数学解析を元に、特に環境効果を表す空間非一様な係数を含む偏微分方程式の解の構造を定量的に評価することで推進していく。研究代表者は、いくつかの重点項目を中心に、研究協力者からの協力及び助言を適宜受けながら、本学大学院生とともに、変分問題、最適化問題および偏微分方程式の研究の推進を統括する。特に、研究協力者の神保秀一氏には固有値問題、田中和氏には変分問題、柴田徹太郎氏には、非線形固有値問題および漸近解析、柴田将敬氏には非線形シュレディンガー方程式等に関する助言・協力を得ながら研究を行なう。

4. 研究成果

(1) 研究代表者の倉田和浩は、研究協力者や本学大学院生らの協力のもと、以下の研究を行なった。

本学大学院生の小森洋平氏および石原洸徳氏との共同研究で、非コンパクトな距離グラフ上での非線形シュレディンガー方程式のエネルギー基底状態の存在問題、およびアレン・カーン型方程式に対するヘテロクリニック解の存在・非存在問題を変分法的手法により研究し、グラフの形状および空間非斉次性との関係を調べた。

本学修了生の梶原堯氏との共同研究で、3種の FitzHugh-Nagumo 反応拡散系に付随する非線

形変分問題の最小化解の安定性やエネルギー評価等を研究し、その研究成果をまとめた論文が学術雑誌に掲載された。さらに、同じく、梶原堯氏との共同研究で、FitzHugh-Nagumo 反応拡散系におけるヘテロクリニック解に関し、特異摂動問題における詳細なエネルギー漸近展開公式を確立した。この研究成果は、現在学術雑誌に投稿中である。

研究協力者の神保秀一氏(北大)との共同研究で、細い領域上での Neumann 窓をもつラブラシアン第 1 固有値の漸近公式と最適化問題を研究した。

本学大学院生の石井裕太氏との共同研究で、化学反応現象に現れる、空間非一様項をもつ空間 1 次元の Schnakenberg 数理モデルの対称な 1 ピーク定常解の構成と安定性解析を行い、その研究成果が国際学術雑誌に掲載された。

本学大学院生の片倉建貴氏との共同研究で、数理物理現象に関連して、ロバン境界条件下での Quantum Waveguide 問題でのエネルギー漸近展開公式についての新たな知見を得た。

本学大学院生の宇津木翔氏との共同研究で、2 種生物と 2 種化学物質の相互作用からなる走化性数理モデルの非定数定常解の分岐構造についての新たな知見を得た。

(2) 研究協力者の神保秀一は、反応・拡散系および固有値問題に関し、以下の研究を行なった。非有界な星形グラフ上の Allen-Cahn-Nagumo 型方程式の時間全域解の存在や構造を解析した。

一様でない断面をもつ細い弾性体の固有振動数:細い領域におけるラメの作用素の固有値の特徴付けを行った。曲げモード(Bending mode)に対応する振動数が小さく、そのゼロに漸近する精密な挙動を、ある 4 階常微分作用素の系の固有値問題へ関連付けをした。また、伸縮モード(Stretching mode)、捻れモード(Torsion mode)も軸対称の場合も極限を 2 階常微分作用素によって特徴付けた。

ストークス作用素の固有値に関して滑らかな領域変形に対するアダマール型変分公式を求めた。特に、ディリクレ条件およびスリップ条件の場合を扱った。

(3) 研究協力者の田中和永は、特異摂動問題に関して以下の成果が得られた。

磁場の効果を考慮した非線形シュレディンガー方程式を考察し、ポテンシャルウェルに凝集する解の多重度に関し、ポテンシャルウェルの cup length を用いた評価を与えた。

非局所問題に対する特異摂動問題にも取り組み非線形シュカード方程式を扱い、凝集解の多重度の評価を与えると共に、従来扱われていなかった locally sublinear case においても新しく deformation method を開発することにより存在結果を得ることができた。

L^2 制限問題に関しては、従来用いられることの少なかった Lagrangian formulation によるアプローチを試み、解の存在、多重度を示すことに成功した。

対数的非線形性を伴うシュレディンガー方程式、Clark の定理に関する結果も得ている。

(4) 研究協力者の柴田徹太郎は、非線形分岐問題を中心に、以下の研究を行なった。

非線形常微分方程式における分岐曲線の様々な振動現象の漸近解析に取り組んだ。分岐曲線の振動現象は、方程式がそれほど複雑でない非線形項を含む場合でも出現することが判明した。

拡散係数に非線形項を含み、同時に振動する非線形項も含む常微分方程式の分岐曲線の解析に、一般化されたタイムマップ法に加えて停留値法を援用することが有効であることが判明した。

一般的な周期関数を非線形項として持つ常微分方程式を考察し、詳細な漸近公式を確立することに取り組んだ。特に自励系の非線形常微分方程式の分岐曲線が無限回振動するかどうかを、関数解析的手法を援用することにより考察し、詳細な漸近公式を得た。

(5) 研究協力者の柴田将敬は、変分問題を中心に、以下の研究を行なった。

プラズマの物理などに現れる準線形シュレディンガー方程式に関して、正值解の一意性や漸近挙動に関する研究を、足達慎二氏(静岡大学)と渡辺達也氏との共同研究を引き続き行った。正值解の一意性に関しては、それまでの研究結果をまとめた論文が出版された。また、正值解の漸近挙動の問題について、増大度が H^1 臨界の非線形項の場合が未解決であったので、その点について研究を行い、得られた結果を投稿中である。

一般的な非線形項を持つシュレディンガー方程式の解の多重性について佐藤洋平氏(埼玉大学)と研究した。

入江博氏(茨城大学)との共同研究において、凸幾何学に表れる最小化問題の一つである Mahler 予想に取り組む、3次元の場合に予想を解決した。その論文は現在投稿中である。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 18 件)

Y. Ishii and K. Kurata, Existence and stability of one-peak symmetric stationary solutions for the Schnakenberg model with heterogeneity, Discrete and Conti. Dynamical System, Series-A. 35(2019), 2807-2875(査読有)
DOI:10.3934/dcds.2019118

S. Cingolani, K. Tanaka, Semi-classical states for the nonlinear Choquard equations: existence, multiplicity and concentration at a potential well, to appear in Rev. Ibero. Math. (査読有)

H. Hirata, K. Tanaka, Nonlinear scalar field equations with L^2 constraint: Mountain pass and symmetric mountain pass approaches, Adv. Nonlinear Stud., Vol. 9, Issue

- 2, 263--290 (2019).
DOI:10.1515/ans-2018-2039
- S. Jimbo, Y. Morita, Entire solutions to reaction-diffusion equations in multiple half-lines with a junction, *J. Differential Equations* 267 (2019), 1247-1276.(査読有), DOI: 10.1016/j.jde.2019.02.008
- T. Kajiwara, K. Kurata, On a Variational Problem Arising from the Three-component FitzHugh-Nagumo Type Reaction-Diffusion Systems, *Tokyo J. Math.* 41(2018), 131-174 (査読有)
DOI:10.3836/tjm/1502179257
- T. Shibata, GLOBAL BEHAVIOR OF BIFURCATION CURVES FOR THE NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEMS WITH PERIODIC NONLINEAR TERMS, *COMMUNICATIONS ON PURE AND APPLIED ANALYSIS* vol. 17 (2018), 2139-2147 (査読有)
DOI: 10.3934/cpaa.2018102
- Y. Sato, M. Shibata, Infinitely many solutions for a nonlinear Schrodinger equation with general nonlinearity. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 57 (2018), no. 5, Art. 137, 31 pp.(査読有)
DOI:10.1007/s00526-018-1413-z
- S. Adachi, M. Shibata, T. Watanabe, A note on the uniqueness and the non-degeneracy of positive radial solutions for semilinear elliptic problems and its application. *Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.)* 38 (2018), no. 4, 1121-1142.(査読有)
DOI:10.1016/S0252-9602(18)30803-8
- S. Cingolani, L. Jeanjean, K. Tanaka, Multiple complex-valued solutions for nonlinear magnetic Schrodinger equations, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, March 2017, Volume 19, Issue 1, pp 37-66.(査読有)
DOI:10.1007/s11784-016-0347-3
- K. Tanaka, C. Zhang, Multi-bump solutions for logarithmic Schrodinger equations, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 56 (2017), no. 2, Art. 33, 35.(査読有)
DOI:10.1007/s00526-017-1122-z
- G. Jiang, K. Tanaka, C. Zhang, Remark on the Clark theorem, *J. Nonlinear Convex Anal.* 18 (2017), no. 8, 1421-1434.(査読有)open access
- S. Jimbo, H.Kozono, Y.Teramoto, E.Ushikoshi, Hadamard variational formular for eigenvalues of the Stokes equations and its application, *Math. Annalen.* 368 (2017), 877-884.(査読有)
DOI: 10.1007/s00208-016-1410-5
- S. Jimbo, Y. Morita, Nonlocal eigenvalue problems arising in a generalized phase -field -type system, *Japan J. Indust. Appl. Math.* 34 (2017), 555-584. (査読有)
DOI: 10.1007/s13160-017-0254-z
- T. Shibata, GLOBAL AND LOCAL STRUCTURES OF OSCILLATORY BIFURCATION CURVES WITH APPLICATION TO INVERSE BIFURCATION PROBLEM, *TOPOLOGICAL METHODS IN NONLINEAR ANALYSIS* vol. 50 (2017), 603-622 (査読有)
DOI: 10.12775/TMNA.2017.032
- M. Shibata, A new rearrangement inequality and its application for L^2 -constraint minimizing problems. *Math. Z.* 287 (2017), no. 1-2, 341-359.(査読有)
DOI:10.1007/s00209-016-1828-1
- S. Adachi, M. Shibata, T. Watanabe, Global uniqueness results for ground states for a class of quasilinear elliptic equations. *Kodai Math. J.* 40 (2017), no. 1, 117-142.(査読有)
DOI:10.2996/kmj/1490083227
- S. Jimbo, K. Kurata, Asymptotic behavior of eigenvalues of the Laplacian on a thin domain under the mixed boundary condition, *Indiana Univ. Math. J.*, 65(2016), pp.867-898 (査読有)
DOI: 10.1512/iumj.2016.65.5831
- T. Shibata, Asymptotic length of bifurcation curves related to inverse bifurcation problems, *JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS*, vol. 438 (2016), 629-642 (査読有)
DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.02.014

〔学会発表〕(計 21 件)

K. Kurata, Construction and stability analysis of one-peak symmetric stationary solutions to the Schnakenberg model with heterogeneity, The 12th AIMS international conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Taiwan National University(Taipei), 2018年(招待講演)

- 倉田 和浩, Precise asymptotic formula for the ground state energy of a quantum waveguide problem with Robin boundary condition, 「信州大学偏微分方程式研究集会」(信州大学)2018年(招待講演)
- S. Jimbo, Eigenvalue problem of the Laplacian in a domain with a thin tubular hole, The third international conference on the dynamics of Differential Equations - In memory of Professor Jack K. Hale, Hiroshima university, 2018年(招待講演)
- 神保秀一, Y-shaped graph and time entire solutions of a semilinear parabolic equation, 研究集会: 反応拡散方程式 -- 伝播現象と特異性の解析および諸科学への応用, 京都大学数理解析研究所, 2018年.(招待講演)
- K. Tanaka, A new minimax approach to nonlinear scalar field equations with L^2 constraint, 中国, International Conference on Variational Methods (ICVAM-4), Chern Institute, Nankai University, 2018年(招待講演)
- K. Tanaka, A singular perturbation problem for nonlinear Choquard equations, PDEs at Valparaiso, Valparaiso, Chile, 2018年(招待講演)
- T. Shibata, Oscillatory bifurcation for semilinear eigenvalue problems, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, National Taiwan University, Taipei, Taiwan. 2018年(招待講演)
- 柴田 将敬, Asymptotic property of ground states for a class of quasilinear Schrödinger equations with H^1 -critical growth, Qualitative Theory on ODEs and its Applications to Mathematical Modeling, 京都大学数理解析研究所, 2018年(招待講演)
- 柴田 将敬, Asymptotic property of ground states for a class of quasilinear Schrödinger equation with H^1 -critical growth, Mini Workshop on Variational Problems, 早稲田大学, 2018年(招待講演)
- 倉田 和浩, ある非コンパクトな距離グラフ上での非線型シュレディンガー方程式に付随する変分問題の解の漸近挙動について, RIMS 研究集会「保存則をもつ偏微分方程式に対する解の正則性, 特異性および漸近挙動について」(京都大学数理解析研究所)2017年(招待講演)
- K. Kurata, On an optimization problem of the first eigenvalue of the Laplacian on a thin domain with Neumann windows, 研究集会「Potential Analysis and Related Fields 2017」(北海道大学)2017年(招待講演)
- K. Kurata, Existence and non-existence of non-constant stationary patterns for certain prey-predator type reaction-diffusion systems with a cross-diffusion effect, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, (Orlando Florida, USA). 2017年(招待講演)
- S. Jimbo, Y-shaped graph and reaction diffusion equations, Qualitative theory of Nonlinear partial differential equations, Okayama university, 2017年(招待講演)
- K. Tanaka, Singular perturbation problem for generalized Choquard equations, the Third Congress of the PRIMA, the Pacific Rim Mathematical Association (session: Nonlinear Elliptic PDEs and Systems), Oaxaca, Mexico, 2017年.(招待講演)
- T. Shibata, Spectral Asymptotics for Inverse Bifurcation Problems, Inverse problems for partial differential equations and related areas, Research Institute of Mathematical Sciences, Kyoto University, Japan, 2017年(招待講演)
- M. Shibata, Symmetric Mahler's conjecture for the volume product in the three dimensional case, Convex, Discrete and Integral Geometry, Banach Center (Białystok, Poland), 2017年(招待講演)
- K. Tanaka, Multiplicity of positive solutions of nonlinear Schrödinger equations concentrating at a potential well, Workshop on Nonlinear PDEs and Calculus of Variations, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin, China, 2016年(招待講演)
- K. Tanaka, Nonlinear elliptic problems in singularly perturbed cylindrical domains, Asymptotic Patterns in Variational Problems: PDE and Geometric Aspects, Hotel Hacienda Los Laureles, Oaxaca, Mexico. 2016年.(招待講演)
- K. Tanaka, Domain shape and multiplicity of positive solutions of nonlinear elliptic equations, the first Japan-Taiwan joint conference on differential geometry, 早稲田大学理工学部, 2016年(招待講演)
- T. Shibata, Inverse and direct bifurcation problems for nonlinear eigenvalue problems, Geometry of solutions of PDE's and its related inverse problems, Tohoku University, 2016年(招待講演)
- (21)柴田 将敬, Uniqueness of positive solutions for a class of quasilinear elliptic equations, 微分方程式の総合的研究, 京都大学, 2016年(招待講演)

[その他]

ホームページ等

<http://www.comp.tmu.ac.jp/tmu-kurata/index.html>

6 . 研究組織

(1) 研究協力者

研究協力者氏名：神保 秀一

ローマ字氏名：(JIMBO, shuichi)

(2)研究協力者

研究協力者氏名：田中 和永

ローマ字氏名：(TANAKA, kazunaga)

(3)研究協力者

研究協力者氏名：柴田 徹太郎

ローマ字氏名：(SHIBATA, tetsutaro)

(4)研究協力者

研究協力者氏名：柴田 将敬

ローマ字氏名：(SHIBATA, masataka)