

令和元年6月7日現在

機関番号：32606

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05242

研究課題名(和文)シュレーディンガー方程式の数理解析

研究課題名(英文) Mathematical Analysis of Schroedinger equations

研究代表者

谷島 賢二 (Yajima, Kenji)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号：80011758

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：シュレーディンガー方程式に関する様々な数学的問題を研究した。特に1)無限遠方で二次・一次関数的に増大するスカラー・ベクトルポテンシャルをもつ電磁場中の多体粒子系が強い不連続性をもつポテンシャルによって相互作用するときの初期値問題の解が一意に存在するための最良な十分条件を得た。2)散乱理論の波動作用素の連続となるルベークならびにソボレフ空間の最良指数を決定した。3)点相互作用をもつシュレーディンガー作用素のスペクトル・散乱理論を研究し、2次元空間におけるレゾルベントの閾値での漸近挙動を決定し、2・3次元空間における散乱の波動作用素が適当な指数を持つルベーク空間において連続であることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

シュレーディンガー方程式は量子力学の運動方程式で初期値問題の一意可解性は運動の一意存在と同意義であるがそのための最も一般的な十分条件は未だに不明である。この研究の成果は問題解決への重要な第一歩である。散乱の波動作用素はシュレーディンガー作用素の関数のルベーク空間での連続性をフーリエ空間のかけ算作用素の連続性に帰着する。従ってこの研究の成果は線形あるいは非線形問題において様々に利用されている。点相互作用をもつシュレーディンガー方程式は低温量子力学において広く用いられているが、そのスペクトル・散乱理論は十分には理解されていない。この研究の成果はこの分野に新たな知見を与えるものである。

研究成果の概要(英文)：I studied various mathematical problems on Schroedinger equations and obtained following results during the period 2016-18: 1) I obtained a sufficient condition for the existence and uniqueness of the propagator for quantum many body systems which are in an external electro-magnetic field whose potentials increase quadratically-linearly at spatial infinity and which interact each others by potentials which carry very strong local singularities. The propagator preserves a large subspace where energy observable may be defined and computed in a natural way; 2) I decided exponents of Lebesgue spaces in which wave operators of scattering theory for Schroedinger operators are continuous when they are regular or singular at threshold; 3) I studied spectral and scattering theory for Schroedinger operators with point interactions in 2 and 3 dimensions. I obtained the asymptotic expansion of resolvent at threshold and proved wave operators are bounded in Lebesgue spaces of certain order.

研究分野：解析学

キーワード：シュレーディンガー方程式 シュレーディンガー作用素 スペクトル理論 散乱理論 初期値問題 波動作用素 点相互作用 ルベーク空間

1. 研究開始当初の背景

- (1) 量子力学の基本方程式であるシュレーディンガー方程式が量子力学的粒子系の運動を一意的に決定する発展作用素を生成するか? この発展作用素は観測すべき物理量が定義できるような、ヒルベルト空間の稠密な部分空間を時間的に保存するか? は量子力学の誕生以来の数学的にも物理的にも重要な問題である。粒子系の運動を特徴付けるハミルトニアンが時間に依存しない場合、問題はハミルトニアンの自己共役性の問題と等価であり、加藤敏夫の研究以来の長い多くの研究の結果、現在ではほぼ解決されている。しかし、ハミルトニアンが時間に本質的に依存する場合は、多くの研究者の長年の研究にもかかわらず、得られている結果はポテンシャルの無限遠方での挙動や、時空の各点における不連続性に関する条件が強すぎて、物理学における重要ないくつかの問題には適用できない状態であった。これは、シュレーディンガー方程式における特異性の伝播速度が無限大であることに起因する無限遠方から回帰した特異性と、相互作用のポテンシャル自身の持つ特異性の間の相互作用をコントロールすることが不可能であったためであるが、このために、ハミルトニアンが本質的に時間に依存するハミルトニアンを持つシュレーディンガー方程式の研究は不必要に強い仮定のもとに行われるか、解の一意存在と解の適当な正則性を仮定した上で行われていた。
- (2) シュレーディンガー作用素の散乱理論の波動作用素は、シュレーディンガー作用素の関数を自由シュレーディンガーの対応する関数に変換するため、波動作用素が適当なルベーク空間において連続であるか否かはきわめて重要である。ポテンシャルに対する適当な条件の下で、(磁場を持たない)シュレーディンガー作用素のスペクトルが連続スペクトルの下端(以下、閾値という)において正則的である場合には、研究開始当初から、波動作用素は1から間の任意の指数のルベーク空間において連続であることが研究代表者によって証明されていた。また、スペクトルが閾値において特異的である場合には空間次元を d とする時、 $d/(d-2)$ と $d/2$ の間の指数をもつルベーク空間においては連続となることもいくつかの次元において示されていた。しかし一般次元の空間においてどうなるのか、あるいは上記の指数が最適であるかどうかは不明であった。
- (3) 点相互作用をもつシュレーディンガー作用素は核物理学あるいは低温物理において広く用いられ、数学的にも広く研究されてきたが Sergio Albeverio など著書の影響が大きすぎたのか、2, 3次元における多くの問題が解決済みの印象があり、研究代表者は研究の重要性をほとんど認識していなかった。

2. 研究の目的

- (1) ハミルトニアンが時間に依存するシュレーディンガー方程式の初期値問題に対して、観測すべき物理量が定義できる空間を保存する性質をもつ発展作用素が、ヒルベルト空間に一意的に構成可能であるための十分条件を定式化し、その一意存在を証明する。この十分条件はほとんどの量子物理学の重要問題に適用可能なように一般的でなければならない。
- (2) シュレーディンガー作用素のレゾルベントが閾値において特異性をもつ場合に、散乱理論の波動作用素がどのような指数をもつルベーク空間において有界となるかを任意次元において精密に決定する。
- (3) 点相互作用をもつ、2次元あるいは3次元空間におけるシュレーディンガー作用素のレゾルベントの閾値における漸近挙動を決定し、散乱の波動作用素が有界とルベーク空間の指数を決定する。

3. 研究の方法

電子媒体あるいは書籍・学術雑誌等による研究情報の取得を手助けとした研究代表者個人の研究を主体とするが、同時に国内外の研究集会、セミナー、ワークショップに出席、あるいは国内外の大学に滞在しての共同研究、研究情報の取得などを通して研究を進めた。とくに、LMU-ミュンヘン大学の Siedentop 教授、デンマークのオーボルグ大学の Cornean 教授、Jensen 教授、イタリア SISSA-Trieste の Dell'Antonio, Michelangeli 教授、Scandone 博士、ナポリ大学の Figari 教授、ローマ大学の Teta 教授、モンゴル国立大学の Galtbayar 教授などと共著論文の作成のための共同研究を行った。

4. 研究成果

- (1) 時間に依存する外電磁場中の多体量子系に対するシュレーディンガー方程式の初期値問題が、多くの物理量が定義できその上での解析学ができるような稠密不変部分空間をもつ発展作用素を一意的に生成するための十分に一般的な二組の十分条件を得た。一つはハミルトニアンが各時間において自己共役となるためのほぼ必要な条件を満たすほど一般的な場合でハミルトニアンの時間微分を満たすべき十分条件、他方はポテンシャルの無限遠での増大度が弱く、無限遠方からの特異性の回帰に少なくとも有限な時間を要する場合の十分条件で、二つの場合で異なった条件で与えられている。この研究成果は物理学における重要なほとんどの問題に適用可能な条件を与え、時間依存シュレーディンガー方程式の数学的あるいは物理的な研究に確固とした基礎を与えるものである。
- (2) 閾値においてレゾルベントが特異性をもつシュレーディンガー作用素に対する散乱の波

動作用素が有界となるためのルベーク空間の指数を2次元・4次元空間の場合を除いて完全に決定した。2次元・4次元においても部分的な結果をえて、完全解決のための重要な一歩となった。これは問題のシュレーディンガー作用素の関数のルベーク空間における評価を、フーリエ変換を通してより容易に可能な自由シュレーディンガー作用素の関数の評価に帰着し、作用素の関数のルベーク空間における評価にきわめて有効な手段を与える。このためにこの研究成果は、非線形解析などにおいて広く応用されている。

- (3) 点相互作用をもつ2次元シュレーディンガー作用素のレゾルベントの閾値における挙動を決定し、レゾルベントに閾値特異性がない場合に波動作用素が指数1と無限大を除いたルベーク空間で有界となることを証明した。3次元空間では、同様な場合に、波動作用素は指数が1と3の間のルベーク空間においてのみ有界となることを証明した。これは点相互作用をもつシュレーディンガー作用素を用いる非線形解析などにきわめて有効な手段を与えるため、今後広く応用されることが期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 6 件)

- (1) A. Jensen, Kenji Yajima, Instability of resonances under Stark perturbations, Ann. Inst. H. Poincare, 査読有、有 20 巻 (2019), no. 2, pp.675-687.
10.1007/s00023-018-0746-7
- (2) H. D. Cornean, A. Michelangeli, Kenji Yajima, Two dimensional Schrodinger operators with point interactions, threshold expansions, zero modes and L^p -boundedness of wave operators, Rev. Math. Phys. 査読有、31 巻, No. 04 (2019), 1950012. 26 page
10.1142/S0129055X19500120
- (3) G. Dellantonio, A. Michelangeli, R. Scandoni, K. Yajima, The L^p -boundedness of wave operators for the three-dimensional multi-centre point interaction, Ann. Inst. H. Poincare. 査読有、19 巻 (2018), pp. 283-322, 10.1007/s00023-017-0628-4
- (4) Kenji Yajima, L^1 and L^{∞} -boundedness of wave operators for three dimensional Schroedinger operators with threshold singularities, Tokyo J. Math. 査読有、41 巻 (2018), pp. 385-406. 10.3836/tjm/1502179271
- (5) Kenji Yajima, Remarks on L^p -boundedness of wave operators for Schrodinger operators with threshold singularities. Doc. Math. 査読有、21 巻 (2016), pp. 391--443.
- (6) Kenji Yajima, Existence and regularity of propagators for multi-particle Schrodinger equations in external fields, Comm. Math. Phys. 査読有、347 巻 (2016), 103--126. 10.1007/s00220-016-2582-2

〔学会発表〕(計 8 件)

- (1) Kenji Yajima, Two dimensional Schroedinger operators with point interactions, Recent results on quantum many body systems, 2018 年
- (2) Kenji Yajima, Approximation of point interactions by regular potentials, Spectral methods in mathematical physics in Mittag-Leffler workshop, 2018 年
- (3) Kenji Yajima, Point interactions in two and three dimensions, Fundamental problems in mathematics and physics (Waseda University), 2018 年
- (4) Kenji Yajima, L^p -boundedness of wave operator for Schroedinger operators, Center of Advanced Studies LMU-Muenchen work-shop. 2017 年
- (5) Kenji Yajima, On wave operator for Schroedinger operators with threshold singularities, Workshop on analysis of effective particle equations and their derivations, 2017 年
- (6) Kenji Yajima, Existence and regularities of propagators for multi-particle Schroedinger operators, Contemporary trends in mathematics of quantum physics
- (7) Kenji Yajima, Remarks on L^p -boundedness of wave operators for Schroedinger operators, Solid Math 2016, 2016 年
- (8) Kenji Yajima, On L^p -boundedness of wave operators for Schroedinger operators, Mathematical challenges in zero-range physics; rigorous results and open problems 2016 年

〔図書〕(計 1 件)

谷島 賢二, 東京大学出版会、数理物理学入門 2018 年. 390 ページ

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者 なし

(2) 研究協力者

研究協力者氏名： 田村 英男、 足立 匡義、 小川 卓克 、加藤 圭一
ローマ字氏名 Tamura Hideo、 Adachi Tadayoshi、 Ogawa Takayoshi、 Kato Keiichi、
研究協力者氏名 中村 周
ローマ字氏名 Nakamura Shu、

研究協力者氏名 Jensen Arne, Cornean Horia, Dellantonio Gianfausto,
Michelangeli Alessandro, Scandone Raffaele, Siedentop Heinz, Griesemer Marcel ,
Soffer Abraham

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。