

令和 5 年 5 月 19 日現在

機関番号：32666

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2022

課題番号：16K05243

研究課題名(和文) ヘルムホルツ方程式の解の評価と対応する非定常問題の解の平滑化評価に関する研究

研究課題名(英文) A study on an estimate of solutions of Helmholtz equation and the smoothing effect of solutions of corresponding time-dependent problems

研究代表者

中澤 秀夫 (Nakazawa, Hideo)

日本医科大学・医学部・教授

研究者番号：80383371

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、摩擦項を伴う波動方程式の定常問題であるエネルギー依存ポテンシャルを伴うHelmholtz方程式の解の、スペクトルパラメータに関する一様な評価及び関連する解の評価の導出、その応用としての元の波動方程式の解の挙動の研究を行った。本研究の成果として、定常問題に対する新たな解の評価を導き、更に磁場の効果をも考慮した摩擦項を伴う波動方程式に対する極限振幅の原理を証明することに成功した。これは1966年(J. Math. Kyoto Univ.)にMizohata-Mochizukiにより得られた結果の改良に相当する。この結果は既に専門誌に投稿し、掲載決定の連絡を受けている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、1966年以来全く進展のなかった、摩擦項を伴う波動方程式に対する極限振幅の原理を、3次元全空間のみならず3以上の全ての次元に対する全空間或いは2以上の全ての次元に対する星状な障害物の外部領域として、更に磁場の効果をも取り入れた形で証明することに成功した。その証明で重要な役割を果たす評価は、Mochizuki(2010, RIMS)及びMochizuki-Nakazawa(2015, RIMS)によって得られた磁場中のシュレディンガー作用素に対する一様リゾルベント評価である。これらの評価によって外部領域における定常問題の解の評価が可能となり、今回の結果が得られた。

研究成果の概要(英文)：In this study, we have derived a uniform estimate with respect to spectral parameters and related estimates for the solution of the Helmholtz equation with energy-dependent potential, which is a stationary problem for the wave equation with dissipative term, and studied the behavior of the solution of the original wave equation as its application. As a result of this work, a new estimate of the solution to the stationary problem was derived, and the principle of the limiting amplitude for the wave equation with dissipative term, which also takes into account the effect of magnetic fields, was successfully proved. This is an improvement of the result obtained by Mizohata-Mochizuki in 1966 (J. Math. Kyoto Univ.). This result has already been submitted to a peer-reviewed journal and has been accepted for publication.

Translated with www.DeepL.com/Translator (free version)

研究分野：偏微分方程式論 数学的散乱理論

キーワード：波動方程式 シュレディンガー作用素 ヘルムホルツ方程式 非自己共役 スペクトル解析 数学的散乱理論 一様リゾルベント評価 極限振幅の原理

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

1966年に Mizohata-Mochizuki(J. Math. Kyoto. Univ)によって示された摩擦項を伴う波動方程式に対する極限振幅の原理に関する結果は次のようなものである。3次元ユークリッド空間において時間周期的な外力項をもち、また初期値が0の、摩擦項及びポテンシャル項を伴う波動方程式の解が、その定常問題の解の時刻無限大でのある位相における極限として表現できるというものである。以下、 x を空間変数を表わすものとし、 $r=|x|$ と表すことにする。彼らの結果では、摩擦項の係数関数は非負、空間遠方で r^{-2} よりも早いオーダーで減衰することを仮定する(なおポテンシャル項にも空間遠方での減衰オーダーの条件および小ささの条件が必要であるが詳細は省略する)。この結果は全空間に対する初期値問題に対するものであり、外部領域における初期値境界値問題での設定では証明されておらず、その後この問題はこれ以後今日に至るまで全く進展がないままであった。

2. 研究の目的

本研究では「1」で述べたように、摩擦項を伴う波動方程式の極限振幅の原理を、まず、全空間の問題の場合には3以外の他の次元でも証明することを目標とした。併せて、外部領域における初期値境界値問題の場合にも同様の結果を得ることを目標とした。更にそれらの考察の中で、摩擦項やポテンシャル項の係数関数の空間遠方における減衰条件の緩和を目指した。またラプラシアンの部分に磁場の効果を取り入れた磁場ラプラシアンとして同様の結果を得ることを目的とした。そのために、まず対応する定常問題である摂動されたヘルムホルツ方程式の解に対する精密な評価を導出することを目指した。これは一様リゾルベント評価といわれるものでスペクトルパラメータに依らない解の評価として近年我々がようやく外部問題でも満足のできる形で証明した結果である。次にその応用として、主目的である時間依存問題に対する解の一性質であり1966年以降、何の進展もなされていなかった極限振幅の原理の結果を改良することを目的とした。

3. 研究の方法

「2」で述べた通り、定常問題に対する解の精密な評価の1つである、スペクトルパラメータに依存しない解の評価(不等式)を、3以上の全ての次元に対する全空間及び2以上の全ての次元に対する、星状な障害物の外部領域(境界条件は0デリクレ条件)という設定で証明する。

そのために、まず摩擦項を考慮せず、実数値関数をポテンシャルとして含む、自己共役なシュレディンガー作用素に対する一様リゾルベント評価式を導出する。そこではIkebe-Saito以来の定常問題に対するエネルギー積分の方法が用いられ、またHardy型の不等式の一般化である不等式評価の手法も用いられる。

次に、摩擦項を伴う波動方程式の定常問題()の解の評価を考察する。その際、重要となるのが、摩擦項に由来する作用素の消散性である。これと、係数関数の空間遠方での減衰条件から導かれるある種のサンドイッチリゾルベント(この「リゾルベント」は自己共役なシュレディンガー作用素のリゾルベントを表す)のコンパクト性が従い、対応する定常問題()の解の存在が判る。更にこの解を、自己共役なシュレディンガー作用素のリゾルベントを用いたある種の積分方程式の解として表す。この表示に、前段で得られた不等式を巧妙に用いることにより、もともとの摩擦項を伴う波動方程式の定常問題の解の評価を導くことができる。これらを、非定常問題の解のラプラス逆変換を用いた表示に用いることにより極限振幅の原理の改良版が証明される。

4. 研究成果

「3」で述べた議論を忠実に遂行し、最終的に磁場の効果をも考慮した摩擦項を伴う波動方程式に対する極限振幅の原理が1966年のMizohata-Mochizukiで得られていた条件を改良した形で証明された。摩擦項の係数関数の空間遠方での減衰条件としては、1966年当時では r^{-3} のオーダーであったが、今回の我々の結果では $r^{-2.5}$ のオーダーよりも早い減衰という条件に緩和されている。なおポテンシャル関数の空間遠方での減衰オーダーに関しては1966年当時と同様であるが、ポテンシャル関数の小ささに関してはやや緩和されている。またこれまで述べているように、3次元全空間のみではなく、3以上の全ての次元に対する全空間、及び、2以上の全ての次元に対する外部領域(滑らかな境界をもつ原点に関して星状な障害物の外部領域)境界条件は0デリクレ条件、として証明をすることができた。更に、摩擦項の係数関数に小さ

さを仮定すれば、その係数関数の符号は負でもよいことも証明した。

この結果は国内の研究集会や日本数学会などで既にアナウンスし、他の関連研究者たちとの質疑応答を通じて次の新たな問題も見つかっている。その中でまず考えるべきは、我々が得た結果の種々の条件、特に係数関数の空間遠方での減衰条件が最良のものであるか否かという問題である。また外部問題に関し、特に他の境界条件(ノイマン、或いはロバン等)としても証明できて当然と考えているが、まだ証明には成功していない。

なお、本研究結果は既に論文に纏め専門誌に投稿し、査読を経て掲載決定の連絡を受けている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kiyoshi Mochizuki, Hideo Nakazawa	4. 巻 1
2. 論文標題 Uniform resolvent estimates for stationary dissipative wave equations in an exterior domain and their application to the principle of limiting amplitude.	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 New Trends in Analysis and Interdisciplinary Applications: Selected Contributions of the 10th ISAAC Congress, Macau 2015 (Trends in Mathematics), Birkhauser	6. 最初と最後の頁 521, 527
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-48812-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hideo Nakazawa	4. 巻 1
2. 論文標題 A Uniform Resolvent Estimate for a Helmholtz Equation with Some Large Perturbations in An Exterior Domain	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Current Trends in Analysis, its Applications and Computation: Proceedings of the 12th ISAAC Congress, Aveiro, Portugal, 2019 (Trends in Mathematics)	6. 最初と最後の頁 633, 641
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-87502-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Hideo Nakazawa
2. 発表標題 Some estimates of solutions of perturbed Helmholtz equations
3. 学会等名 ISAAC 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中澤秀夫
2. 発表標題 大きな摂動項を伴うヘルムホルツ方程式の一樣リゾルベント評価とその応用
3. 学会等名 つくば偏微分方程式研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中澤秀夫
2. 発表標題 ヘルムホルツ方程式の解の評価
3. 学会等名 名古屋偏微分方程式研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中澤秀夫
2. 発表標題 磁場中のシュレディンガー方程式に対する一様リゾルベント評価とその応用 I & II
3. 学会等名 平成28年度RIMS共同研究「微分方程式に対する散乱理論の展開」(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 中澤秀夫
2. 発表標題 摩擦項をもつ磁場中の波動方程式に対する極限振幅の原理
3. 学会等名 駿河台偏微分方程式研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 中澤秀夫
2. 発表標題 摩擦項をもつ磁場中の波動方程式に対する極限振幅の原理
3. 学会等名 日本数学会 函数解析学分会
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

平成 28 年度 RIMS 共同研究 「微分方程式に対する散乱理論の展開」
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kaizuka20160729j.pdf>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	門脇 光輝 (Kadowaki Mitsuteru) (70300548)	滋賀県立大学・工学部・教授 (24201)	
研究分担者	望月 清 (Mochizuki Kiyoshi) (80026773)	東京都立大学・理学研究科・名誉教授 (22604)	
研究分担者	渡辺 一雄 (Watanabe Kazuo) (90260851)	北里大学・一般教育部・教授 (32607)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------