様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月　　３ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５２４４

研究課題名（和文）数理生態学に現れる自由境界問題と反応拡散方程式の研究

研究課題名（英文）Study on free boundary problems and reaction-diffusion equations arising in mathematical ecology

研究代表者

山田　義雄（YAMADA, Yoshio）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：２０１１１８２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では反応拡散方程式に対する自由境界問題を取り扱った。これは数理生態学における生物の侵入・移動現象をモデルとする問題であり、生物の個体数密度や生息域の境界（自由境界）の挙動を知ることがテーマである。個体数密度は反応拡散方程式により支配され、境界の動きはStefan型条件により定められるとする。この問題は2010年のDu-Linによる提唱以来活発に研究されている。拡散方程式が、正の安定平衡点を2個持つような、正値双安定反応項を伴う場合において、新しいタイプの漸近挙動が起こることを発見した。さらに、時間の経過とともに個体数や生息域がどのように変化するか、移り変わる過程の理論的解明に成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
　反応拡散方程式に対する自由境界問題は外来生物の侵入現象や、環境破壊により従来の生息域を離れ、新しい生息環境を求めて生物が移動する現象を数理モデル化したものであり、生態学的にも現実的な重要問題である。生物種の新しい生息域への展開について、成功や失敗の条件・状況を知ることは数理科学的にも生態学的にも興味あるテーマである。本研究により、生息域がある一定の範囲を超せば必ず無限に拡大すること、拡大するケースでは密度関数は一定の形状を保ちながら波のように進むこと、生息域の境界（自由境界）の拡大速度は一定の値であることなど、多くのに重要な成果を得ることができた。

研究成果の概要（英文）：Our research handles a free boundary problem for reaction-diffusion equations. This problem models spreading and migrating phenomena of a biological species and the main issue is to know asymptotic behaviors of the population density of the species and the boundary (free boundary) of its habitat. It is assumed that the density is governed by a reaction-diffusion equation and that the dynamics of the free boundary is determined by the Stefan condition. Since these free boundary problems were proposed by Du and Lin in 2010, a lot of people have studied them. We have discussed a reaction-diffusion equation with positive bistable reaction term which has two positive and stable equilibrium points and found out that a new type of asymptotic behaviors occurs for the free boundary problem. Moreover, we also have succeeded in getting theoretical understanding how the population density and habitat of the species change according as time goes on.

研究分野：非線形解析学

キーワード：自由境界問題　反応拡散方程式　漸近挙動　比較定理　数理生態学

## １．研究開始当初の背景

2010 年 Du-Lin は反応拡散方程式に対する次のような自由境界問題を提起した：

$$u_t = u_{xx} + f(u), \qquad 0 < x < h(t), \ t > 0,$$

(P) $$u_x(t,0) = 0, \quad u\big(t, h(t)\big) = 0, \qquad t > 0,$$

$$h'(t) = -\mu u_x\big(t, h(t)\big), \qquad t > 0,$$

および初期条件を加えて考える。これは外来生物の侵入現象や環境破壊などに起因する生物の移動現象をモデルとする問題であり、$u = u(t,x)$ は生物の個体数密度、1 次元区間 $0 < x < h(t)$ は生物の生息域、境界 $x = h(t)$ は生息域の最前線を表し、その動きは Stefan 型の境界条件により定まると仮定する。ここの問題(P)について、解 $(u(t,x), h(t))$ が時間の経過とともにどのように変化するかを調べることが重要なテーマである。Du-Lin の研究により反応項 $f(u)$ がロジスティック型の場合、 $t \to \infty$ とともに自由境界 $h(t)$ が無限遠方まで拡がり、かつ$u(t,x)$ が正定数に広義一様収束する（spreading）場合と、自由境界が一定値を超えることなく、かつ $u(t,x)$ が 0 に一様収束する（vanishing）場合の二者択一性が成り立つことなど多くの興味ある成果が得られた。これらの結果に多くの研究者の関心が集まり、最近(P)は活発に研究され始めた。(P)の解の漸近挙動を解析すると、spreading 解については自由境界が一定の速度で拡がるとともに、$u(t,x)$ は一定との形状を保ちながら推移することが示された。 Du-Lou (2015) の研究により、これらの漸近挙動の解析には、次の semi-wave 問題が密接に関連することがわかった：

(SW) $$q'' - cq' + f(q) = 0, \quad q > 0, \qquad z > 0,$$

$$q(0) = 0 \quad , \ \mu q'(0) = c, \qquad \lim_{z\to\infty} q(z) = u^* \ .$$

ここで $c$ は未知の正定数, $u^*$は $f(u^*) = 0$ をみたす正値安定平衡点である。詳しく述べると、反応項が単安定、または双安定などの条件を満たせば、(SW) は一意解 $(c, q(z))$ を持つことが示され、この解を用いて(P)の spreading 解 $(u,h)$について自由境界の漸近的拡大速度は $c$ に近づき、$u(t,x)$は $q(h(t)-x)$ によって近似されることによって、時間が経つとともに進行波のように推移していくことが知られている。

## ２．研究の目的

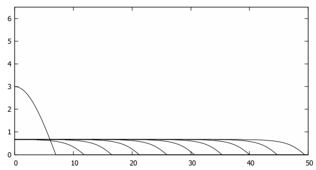
本研究の目的は (P) の解について新しいタイプの漸近挙動を発見、解析することである。反応項 $f(u)$ が 4 個の零点 $0,\ u_1,\ u_2,\ u_3$ $(0 < u_1 < u_2 < u_3)$ を持ち、このうち $u_1, u_3$ の二つが安定であると仮定する。このような性質を正値双安定と呼ぶ。このとき(P)の解の漸近挙動について、我々の研究グループは vanishing のケース以外に、$u_1$ に対応する small spreading, $u_3$ に対応する big spreading, およびこの 2 種類の挙動の間のボーダーラインに相当する transition に分類できることを証明していた（次ページ図参照：左から順に small spreading, big spreading, transition）。

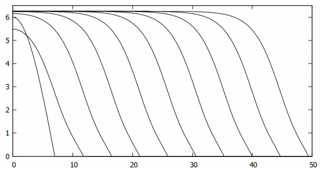
　これら 2 種類の spreading 解に対応する semi-wave 問題を考えるとき、$u^* = u_1$ のときを

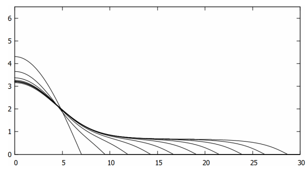
(SW1)，$u^*=u_3$ のときを（SW３）と表す。反応項が正値双安定性の条件を満たすとき、(SW1)は必ず一意解 $(c_1 q_1(z))$ を持つが、他方(SW3)は一意解 $(c_3, q_3(z))$ を持つケースと解が存在しないケース両方の可能性があることが知られていた。我々は $(u,h)$を（P）の small spreading 解とするとき

(2.1) $$\lim_{t\to\infty}(h(t)-c_1 t-H)=0, \qquad \lim_{t\to\infty}\sup_{0<x<h(t)}|u(t,x)-q_1(h(t)-x)|=0$$

（ただし $H$ は定数）の証明を与えることを第１目標とした。(P)の big spreading 解についても (SW3)が一意解をもてば (2.1) と類似の結果を証明できると予想される。ここで問題となるのは(SW3)が解を持たない場合である。このとき、big spreading 解の自由境界の振舞いについて $h(t)/t\sim c_1$ のように small spreading 解に対応する速度に等しいことが知られている。数値シミュレーションからは $u(t,x)$ が段丘型形状の解（テラス解）に収束すると予想されており、このような形状の関数で近似さるかを理論的に明らかにすることを次の目標とした。







３．研究の方法

本研究を遂行するにあたり、まず必要な理論は反応拡散方程式に対する、解の正則性理論、比較原理、力学系理論である。また、自由境界問題（P）についても比較原理が成立するため、その解の漸近挙動を解析するためには適切な比較関数を構成することが大切である。さらに、semi-wave 問題(SW)を解くためには、相平面の方法による２階常微分方程式の解析手法が有効である。時間無限大での解の挙動を調べる際、無限区間での解析が必要となり、通常の力学系理論が役立たない。この難点を克服するため、１次元空間の特性に留意して零点数の理論を活用した。

上述の理論・技法・アイデアをよりいっそう発展させるため、研究代表者、研究協力者は国際会議、研究集会、ワークショップに積極的に参加し、最新の研究成果や研究情報の獲得に努めるとともに、参加者と研究交流を行った。とくに研究代表者は

International Conference on Reaction-Diffusion Equations and Their Applications to the Life, Social and Physical Science, 2016年５月、中国人民大学、北京

11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2016年７月、オーランド、フロリダ

12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2018 年７月、国立台湾大学、台北

などの国際会議に出席し、自由境界問題に関する講演を行い、参加者と研究交流をおこなった。

４．研究成果

(1) ゼロ Dirichlet 境界条件（固定境界）

（P）において固定境界 $x=0$ における条件を Dirichlet 条件 $u(t,0)=0$ で置き換えた自由境界問題（(PD）で表わす）を考える。反応項 $f(u)$ は単安定または双安定で、$u^*$ を正値安定平衡点と仮定する。このとき(PD)の spreading 解 $(u(t,x),h(t))$ について自由境界が無限遠に拡がるとともに $u(t,x)$ は

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = v^*(x), \qquad x \geq 0 \text{ について広義一様収束,}$$

を満たすことが知られていた。ただし $v^*$ は次の定常問題の解である：

(SD) $\quad v'' + f(v) = 0,\ \ v > 0, \quad x > 0,$ 　および　 $v(0) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} v(v) = u^*.$

これらの性質を満たす spreading 解について、自由境界の拡大速度や密度関数の形状に対しても(SW)の一意解 $(c, q(z))$ が密接に関係する。実際、任意の正数 $0 < \varepsilon < c$ に対して

(4.1) $$\lim_{t\to\infty} (h(t) - ct - H) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \sup_{\varepsilon t < x < h(t)} |u(t,x) - q(h(t) - x)| = 0$$

($H$ は定数）を示すことができた。この結果は固定境界での条件は漸近挙動に大きな影響を与えないことを示している。また、(4.1)を示すためには比較関数を巧妙に構成することがキーポイントであった。

(2) ゼロ Neumann 境界条件（固定境界）

反応項 $f(u)$ が正値双安定の条件を満たすとする。このとき Du-Matsuzawa-Zhou (2015) が用いた議論により(P)の small spreading 解について(2.1)を満たすことを示した。同時に big spreading 解についても、(SW3)が一意解 $(c_3, q_3(z))$ を持つ場合には(2.1)と類似の結果が成り立つことを示すことができる。(P)の big spreading 解について詳しい漸近評価が未解決であったのは(SW3)が解を持たないときである。この場合 (SW1)の解 $(c_1, q_1(z))$ に加え、次の進行波解問題

$$Q'' - cQ' + f(Q) = 0, \quad Q > 0, \qquad -\infty < x < \infty,$$

(TW) $$\lim_{x\to-\infty} Q(x) = u_1, \qquad Q(0) = \frac{u_1+u_3}{2}, \qquad \lim_{x\to\infty} Q(x) = u_3$$

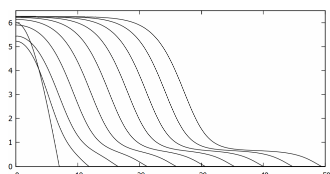
の一意解 $(c^*, Q^*(x))$ も解の近似に関わることがわかった。なお、この場合 $0 < c^* < c_1$ が成り立つ。$(u,h)$ が (P) の big spreading 解であるとき、任意の $c \in (c^*, c_1)$ に対して

(4.2) $$\lim_{t\to\infty} (h(t) - c_1 t - H_1) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \sup_{ct < x < h(t)} |u(t,x) - q_1(h(t) - x)| = 0$$

（ただし $H_1$ は定数）が成り立つことを示した。(4.2)の評価は gig spreading 解の自由境界が small spreading 解と同じ速度で進み、各地点において第１ステージでは $u_1$に近づくことを意味する。さらに任意の $c \in (c^*, c_1)$ に対（して

(4.3) $$\lim_{t\to\infty} \sup_{0 < x < ct} |u(t,x) - Q^*(c^* t + H_2 - x)| = 0$$

（ただし $H_2$ は定数）が成り立つことも証明できた。次の図はテラス解の様子を示す数値シミュレーションである。



(4.3)の結果は、各地点における第２ステージでは $u_3$ に収束することを意味する。このように

(4.2),(4.3) の漸近評価は $u_1$ と $u_3$ を結ぶ進行波解 $Q^*$、および $u_1$ と 0 を結ぶ semi-wave $q_1$1 によって $u_1$ と $u_3$ の二段丘をもつ伝播型テラス解と呼ばれる関数が生成され、時間とともに $u(t,x)$はこの関数に一様収束することを示している。これはテラス解を具体的に構成することに成功した非常に興味深い研究成果である。これらの正値双安定反応項を伴う自由境界問題(P)に関する結果は論文 Kaneko-Matsuzawa-Yamada, Asymptotic profiles of solutions and propagating terrace for a free boundary problem of reaction-diffusion equation with positive bistable nonlinearity にまとめ投稿中である。

## ５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　6 件）

① Michel Pierre, Takashi Suzuki and Yoshio Yamada, Dissipative reaction diffusion systems with quadratic growth, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 68 (2019), pp. 291-322，査読有.
DOI: 10.1512/iumj.2019.68.7447

② Yuki Kaneko and Yoshio Yamada, Spreading speed and profiles of solutions to a free boundary problem with Dirichlet boundary conditions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 465 (2018), pp. 1159-1175，査読有.
DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.05.056

③ Shanbing Li and Yoshio Yamada, Effects of cross-diffusion in the diffusion prey-predator model with a protection zone II, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 461 (2018), pp. 971-992，査読有.
DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.12.029

④ Rei Yamamoto and Yoshio Yamada, Analysis of forest kinematic model with degenerate diffusion, Advances in Mathematical Analysis and Applications, Vol. 25 (2016), pp. 300-313, 査読有.

⑤ Yusuke Yoshida and Yoshio Yamada, Asymptotic behavior of solutions for semilinear Volterra diffusion equations with spatial inhomogeneity and advection, Tokyo Journal of Mathematics, Vol, 39 (2016), pp. 271-292，査読有.
https://projecteuclid.org/tjm

⑥ Yusuke Kawai and Yoshio Yamada, Multiple spreading phenomena for a free boundary problem of a reaction-diffusion equation with a certain class of bistable nonlinearity, Journal of Differential Equations, Vol. 261 (2016), pp. 538-572，査読有.
DOI: 10.1016/j.jde.2016.03.017

〔学会発表〕（計　5 件）

①　山田義雄, 数理生態学に現れる自由境界問題と解の漸近評価，松山解析セミナー2019，愛媛大学，2019 年 2 月.

② Yoshio Yamada, Asymptotic estimates for a certain class of one-dimensional free boundary problems, 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications，国立台湾大学，台北，2018 年 7 月.

③　山田義雄，反応拡散方程式に対する自由境界問題，第 5 回偏微分方程式レクチャーシリーズ in 福岡工大，福岡工業大学，2017 年 5 月.

④ Yoshio Yamada, Multiple spreading phenomena for a free boundary problem of diffusion equations with bistable nonlinearity, 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications，オーランド，フロリダ，2016 年 7 月.

⑤ Yoshio Yamada, Asymptotic profiles for some free boundary problems in ecology, International Conference on Reaction-Diffusion Equations and Their Applications to the Life, Social and Physical Science，中国人民大学，北京，2016 年 5 月.

〔その他〕

ホームページ等

http;//www.f.waseda.jp/Yamada/

## ６．研究組織

(1)研究分担者

なし

(2)研究協力者
研究協力者氏名：兼子　裕大
ローマ字氏名： KANEKO, Yuki
研究協力者氏名：若狭　徹
ローマ字氏名： WAKASA, Tohru
研究協力者氏名：星野　弘喜
ローマ字氏名： HOSHINO, Hiroki
研究協力者氏名：松澤　寛
ローマ字氏名： MATSUZAWA, Hiroshi
研究協力者氏名：遠藤　真帆
ローマ字氏名： ENDO, Maho