様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　４ 月 ２７ 日現在

機関番号：３４３０４
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2020
課題番号：１６Ｋ０５２４５

研究課題名（和文）非線形拡散方程式における進行波と界面ダイナミクスの研究

研究課題名（英文）Study of traveling wave and interfacial dynamics in nonlinear diffusion equation

研究代表者
柳下　浩紀（Yagisita, Hiroki）

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：８０３４９８２８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　500,000円

研究成果の概要（和文）：非線形の拡散現象を記述する放物型方程式に関して、進行波と界面のダイナミクスについて研究を行った。特に、進行波や曲線の状態達の住む空間は、無限次元の空間と捉えることが自然であり、そのような無限次元の空間を研究した結果、多くの無限次元空間と多くの有限次元空間が共有する普遍的構造を見出し、また、その過程で数学的言明を解釈する普遍的な方法を抽出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
非線形系の拡散現象は、物理学、化学、生物学、さらに近年は金融工学上のモデル等、多くの分野で現れる。それらの中には、急激な状態変化が狭い領域に集中する界面と呼ばれる局在構造が出現して、この界面の示す振る舞いを理解することが非線形現象を解明する上での鍵になることが数多くある。本研究による成果は、そのような理解を可能にするための数学的な基礎の提供に資することが大いに期待できるものである。

研究成果の概要（英文）：We studied the dynamics of traveling waves and interfaces with respect to parabolic equations that describe nonlinear diffusion phenomena. In particular, it is natural to think of the space in which traveling waves and curved states live as an infinite dimensional space, and as a result of studying such an infinite dimensional space, many infinite dimensional spaces and many finite dimensional spaces have been found. We found a universal structure to share, and in the process extracted a universal method of interpreting mathematical statements.

研究分野：非線形解析

キーワード：非線形現象

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

非線形拡散方程式で記述される拡散現象では、界面の動力学を支配する方程式が、形式的な漸近展開によって、空間内の曲面の発展方程式として導かれていた。これらの方程式は、微分幾何学的には広い意味で平均曲率流方程式と呼ばれるものとなる。拡散現象が単独方程式で記述されている場合には、導出の数学的正当化がすでに多くの研究者の努力の結果、ほぼ満足のいく形で成功していた。連立の方程式系の場合にも、その系が比較定理、ないしは変分構造を有するならば、単独方程式の場合と同様にして、導出の正当化を行なうことが可能である。しかしながら、この種の‘　数学上の良い構造’を持たない一般の連立系に関しては、数学的正当化は得られていなかった。FitzHugh-南雲方程式の２つの進行波が互いに向かい合っていると、その間の距離が離れている段階では波形と速度をほぼ一定に保ったままそれらは近づいていくのだが、最終的に進行波はともに消滅してしまうことが数値実験の結果から確認できる。単独の双安定拡散方程式に関しては同様の事実が本研究代表者によって厳密に証明され、それ以後も様々な方程式に対して関連する研究が行われていた。しかし、FitzHugh-南雲方程式に対して、これを数学的に厳密に示すことは未だになされていなかった。

２．研究の目的

非線形の拡散現象を記述する放物型方程式に関して、その理解に重要な対象である界面と進行波のダイナミクスについて研究を行う。界面のダイナミクスについては、比較定理や変分構造を有さない一般の連立系に対して、界面ダイナミクスの縮約系として平均曲率流が現れることを数学的に厳密に示す。また、進行波のダイナミクスについて、FitzHugh-南雲方程式、あるいは、類似の方程式の進行波の衝突消滅を数学的に厳密に示す。以上を大きな具体的研究目的とした。

３．研究の方法

分岐理論や反応拡散系の特異摂動理論において使われてきたリャプーノフ・シュミットの方法（あるいは、その類似の分解法）を適用する。第一に曲面上の関数を界面の近くの成分とそこから離れた位置にある関数の成分へと分解する。この分解法は、研究代表者が無限の過去において二つの進行波解からなる解の存在と消滅過程の特徴づけの証明において大域的不変多様体の構成に際し既に利用したものである。次に界面の近くの成分に関して高波数モードと低波数モードに分解し、さらに各々の低波数モードを一次元定常波解の平行移動に伴って現れる中立なモードとそれ以外の横断的なモードへと分解を行う。加えて、これらの特定の具体的な微分方程式系の理解を得るための試行錯誤を通して、無限次元空間を含めた普遍的な幾何学的構造や数学的言明に関する解釈を行うための普遍的な枠組みなどについても考察を深める。

４．研究成果

良い数理構造を必ずしも持たない一般の連立系に関し界面運動の支配方程式として、平均曲率流方程式の数学的導出に関するスペクトルの研究を行った。一方、進行波や曲線の状態達の住む空間は、無限次元の空間と捉えることが自然である。そのような無限次元の空間を研究することは基礎的な問題であるが、この問題に関して、そのような無限次元の空間について研究を行い、その結果として、深い構造を持った空間が、実は、有り触れた存在として、多数、存在するであろうことを予想することができた。その予想の重要な傍証として、以下のようなことを明らかにした。n 次元複素多様体は、複素数体の有限直積 Cn の開集合の間の双正則写像による多様体である。一方、ローチは、A を可換バナッハ環とするとき、A の開集合上の A 値関数が正則であることの定義を与えた。ローチによる正則関数の定義は有限直積　An の開集合上の　A 値関数に直線的に一般化できる。したがって、An をモデルとする多様体（n 次元 A-多様体）が容易に定義される。しかしながら、私見では、その非自明な例は、(n= 1、すなわち、リーマン面の場合も含めて）あまり多くは知られていなかったように思われる。ところで、X をコンパクト・ハウスドルフ空間とするとき、X 上の複素数値連続関数全体のなす環 C(X)は可換バナッハ環（さらには、可換 C*環）のもっとも基本的な例である。研究成果として、Γ(M)を X 上のコンパクト複素多様体の連続族（コンパクト複素解析構造の位相的変形）M の連続切断全体とするとき、Γ(M)に X 上のある複素ベクトル・バンドルの連続切断全体からなる C(X)-加群をモデルとする C(X)-

多様体の構造が入ることを見た。したがって、特に X が可縮ならば、$\Gamma(M)$は有限次元 $C(X)$-多様体である。さらに、これらの幾何的な構造や力学的な構造に関する言明を含む様々な数学的な言明を正確に解釈する普遍的な枠組みを与えるために考察をした結果、次のようなを明らかにした。関数記号の解釈として部分関数を許容するような「広義の構造」を考える。例えば、言語が $\cdot^{-1}$ と 0 を含むとき、0^{-1} が定義されているかは、どうかは、「広義の構造」ごとに異なる。しかし、証明とは正しいことを確認することであるとすれば、部分関数を許容する代価として、「正しくない文字列」が証明されないようにするために、（通常の形式証明系に比べて）形式証明系に何らかの制約が必要である。このような「広義の構造」に対して、意味論として２値論理を与えようとしたときに、「未定義な項を含む閉論理式」は、真とも偽とも言い難い場合があることが問題になる。よって、最初に取り上げるべき意味論は「真である（正しい)」、「真でない（正しくない)」を定義することである。「通常の意味論」の定義との違いは、未定義な項が出現している場合であっても、原子閉論理式 $r=s$，$R(t_1, t_2, \cdots, t_n)$が取る値を定義することである。そして、この違いは「通常の形式証明系」の機能不全を引き起こす。しかしながら、具体的には「完全性定理」として、通常の形式証明系の「適当な修正」によって、機能が回復できることを証明した。特に重要な点は、適当な形式証明系を与えるための具体的な方法（の一つ）を見出したことである。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Yagisita Hiroki	４．巻 6
２．論文標題 Finite-dimensional complex manifolds on commutative Banach algebras and continuous families of compact complex manifolds	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Complex Manifolds	６．最初と最後の頁 228～264
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/coma-2019-0012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 柳下浩紀
２．発表標題 「部分関数を関数記号の解釈とする（広義の）構造」の意味論，証明体系，完全性定理
３．学会等名 日本数学会２０２１年度年会
４．発表年 2021年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関