

令和元年5月31日現在

機関番号：13302

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05251

研究課題名(和文) 層モデルを用いた構成的逆数学の研究

研究課題名(英文) A study of sheaf models in constructive reverse mathematics

研究代表者

石原 哉 (ISHIHARA, Hajime)

北陸先端科学技術大学院大学・先端科学技術研究科・教授

研究者番号：10211046

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、(1)構成的逆数学における未解決問題の解決と新たな公理の発見、(2)層モデルを用いた公理や定理の体系的な分離手法の構築、(3)分離手法などメタ理論の構成的数学の枠組みでの展開を目的とする。

(1)単調完備定理と同値になる原理、有界内包公理、を明らかにした。2進展開定理と中間値の定理と同値になる弱いケーニッヒの補題に対する条件を解明した。(2)2つの順序構造とその間の単調写像により構成される、拡張フレームの概念を提案した。拡張フレーム上のクリプキ層モデルを用いて、様々な公理を体系的に分離する手法を開発した。(3)上記クリプキ層モデルの構成が構成的集合論の枠組みで展開できることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

構成的逆数学は、様々な哲学のもとに展開された数学を、統一的な視点から論理的公理および関数(集合)の存在公理などにより分類・整理・体系化するという斬新で独創的な研究である。本研究により、構成的逆数学の重要な未解決問題を解決し、新たな公理を発見し、公理(定理)の体系的な分離手法を構築することにより、排中律などの論理的公理、可算選択公理などの関数の存在公理、および新たに発見された公理のなす束構造の解明と解析が大きく進展した。

直観主義論理では証明とプログラムの間に自然な対応がある。直観主義論理の証明からプログラムを抽出し高信頼ソフトウェアを開発するための基盤理論の深化や限界の解明に寄与した。

研究成果の概要(英文)：This research aims at (1) solving open problems and finding new axioms in constructive reverse mathematics, (2) developing a systematic method to separate axioms and theorems using sheaf models, (3) developing the systematic method in constructive mathematics.

(1) We showed that the monotone convergence theorem is equivalent to a restricted bounded comprehension axiom, and showed that the binary expansion theorem and the intermediate value theorem are equivalent to restricted versions of the weak Koenig lemma. (2) We propose the notion of an extended frame consisting of two partially ordered sets and a monotone mapping between them, and develop a systematic method to separate axioms and theorems using Kripke sheaf models over extended frames. (3) We showed that the construction of a Kripke sheaf model over an extended frame is done within the framework of constructive set theory.

研究分野：数理論理学・構成的数学

キーワード：構成的数学 逆数学 層モデル

1. 研究開始当初の背景

数学の(形式)理論体系は対象を記述する公理とそれらから定理を導きだすための論理により規定される。例えば、群論は群の公理と通常の論理(古典論理)より成る。

構成的数学は、Brouwerの直観主義数学に始まり、Markovの構成的数学、Bishopの構成的数学など、様々な哲学的背景に基づいて研究が続けられている。構成的数学の論理は、古典論理より弱く排中律やド・モルガンの法則などが証明できない、直観主義論理である。命題間の論理的同値性を同値関係とみなせば、直観主義論理の同値関係は古典論理の同値関係の部分集合であり、直観主義論理による類別は古典論理による類別より細かい。

Friedman-Simpsonの逆数学は、古典論理を用いて、通常の数学の様々な定理と同値な集合の存在公理を明らかにする。弱い公理と古典論理による形式体系上で、定理を弱いケーニッヒの補題(WKL)や算術的内包公理(ACA)等の集合の存在公理の線形順序構造に分類する。古典論理を用いた論理的同値関係では、WKLの対偶命題のfan定理(FAN)はWKLの同値類に分類され、通常の数学と矛盾する定理は矛盾()の同値類に分類される。

研究代表者は、構成的数学の研究成果を踏まえ、直観主義論理を用いた構成的逆数学を提唱した。構成的逆数学は、通常の数学、直観主義数学およびMarkovの構成的数学などで証明された定理を、統一的な視点から論理的公理や関数(集合)の存在公理などにより分類・整理・体系化する。弱い公理と直観主義論理による形式体系上で、定理を排中律などの論理的公理および可算選択公理などの関数の存在公理のなす束構造に分類する。直観主義論理の論理的同値関係においては、より細かい分類が可能である。

直観主義論理の意味論として、Kripkeモデル、Bethモデル、代数的および位相的モデル、モデルなどがある。それらの一般的なモデルは、特定の形式理論に対して扱いやすいものではない。層(sheaf)モデルは、より幾何学的で扱いやすい性質を持っており、デデキント実数とコーシー実数の違いや、可算選択公理の証明不可能性を示す際の強力な手法である。

研究代表者はこれまで2つの基盤研究(C)により構成的逆数学の研究を推進してきた。その中で、

- (1) いくつかの重要な未解決問題が今までにない新たな公理と関係していること、
 - (2) 新たな公理Aと既存の公理Bを分離する、体系的な手法が必要なこと、
 - (3) その分離手法それ自身を構成的数学の枠組みで展開し実証することの必要性、
- などの知見が得られた。

また、欧州ではEU第7次研究枠組み計画(FP7)で構成的数学・逆数学を含むプロジェクトCORCONが開始し、日本では研究代表者をコーディネーターとするJSPS研究拠点形成事業(A.先端拠点形成型)「数理論理学とその応用の国際研究拠点形成」がCORCONと連携して平成27年より5年間の予定で開始していた。

2. 研究の目的

本研究は、上記問題点を解決するため以下(1)~(3)を目的とした。

(1) 未解決問題の解決と新たな公理の発見

単調完備定理(上に有界な単調増加実数列は収束する)、2進展開定理($[0,1]$ 閉区間の実数は2進展開できる)、中間値の定理、Lindelöfの定理など、構成的逆数学における重要な未解決問題を解決する。これを通してそれらの定理と論理的に同値となる新たな公理を発見する。

(2) 位相空間上の層モデルを用いた体系的な分離手法の構築

既知の公理および(1)で発見した新たな公理など、様々な公理(定理)を分離するための層モデルを用いた体系的な手法を構築する。弱い公理(の集合)Tの下で、公理(定理)Aから公理(定理)Bが導けないことを示すための層モデルを用いた体系的な手法を構築する。また、様々な公理を層モデルの性質により特徴づけ解析する。例えば、論理的公理と位相空間の連結性との関係を解明する。

(3) 層モデルの構成的理論の構築

従来の層モデルによる公理等の分離手法などのメタ理論は、古典的数学の枠組みで展開されているため非構成的であり非可述的である。層モデルを用いた分離手法を体系的に、非構成的原理やべき集合概念を用いずに展開することにより、メタ理論としての分離手法が構成的数学の枠組みにおいても展開できることを実証する。

3. 研究の方法

「研究目的」の(1)~(3)それぞれに関して、今までの研究結果の調査を行い、いくつかの問題に対してケーススタディを行った。その後、調査およびケーススタディで得た知見の体系化・一般化を行い、それに基づき研究を推進した。

(1) 未解決問題の解決と新たな公理の発見

単調完備定理では、論理的公理の他に有限選択公理の役割の重要性が分かってきた。有限選択公理を制限した公理を考え、単調完備定理と論理的に同値となる公理の組合せを解明する。また、2進展開定理および中間値の定理に関する研究動向の調査を並行して行う。

2進展開定理と中間値の定理は弱いケーニッヒの補題(WKL)「無限2分木はパスを持つ」と深い関係がある。無限2分木に条件を加えることにより2進展開定理と中間値の定理と論理的に同値となる新たな公理を発見する。また、WKLは制限されたド・モルガンの法則および可算選言選択公理の一種の組合せと論理的に同値であることが知られている。これらの新たな公理と制限されたド・モルガンの法則、可算選言選択公理の関係も明らかにする。

(2) 層モデルを用いた体系的な分離手法の構築

位相空間上の層を用いたモデルの調査を行い、弱い公理(の集合) T に対して健全性を備えた層モデルの構成法を解析する。公理(定理) A と B に対して A は真であるが B が偽となる層モデルを構成することにより、 A から B が導けないことを示す。PEM、DML、DNEの A や B を制限した公理を対象とする。 ${}_1\text{-PEM}$ 、 ${}_1\text{-PEM}$ 、 ${}_1\text{-PEM}$ 、 ${}_1\text{-DML}$ などが成り立つが、それらの逆が成り立たないことを、層モデルを構築することにより示す。

また、関数の存在公理・算術的公理を対象に分離手法のケーススタディを行う。関数の存在公理としては可算選択公理や可算選言選択公理を ${}_1$ 論理式などに制限した公理を対象とする。算術的公理としては帰納法公理を ${}_1$ 論理式などに制限した公理も対象に含める。

(3) 層モデルの構成的理論の構築

層モデルの理論を、Martin-Löfの型理論で自然に解釈できる、構成的(かつ可述的)集合論CZFで展開することを目指す。(2)で扱った論理的公理を分離する層モデルの構築方法に対して、どのような局面で非構成的原理やべき集合概念が必要かを明確にする。その上で、それらの非構成的原理やべき集合概念を避けるために必要な修正を層モデルの定義に対して行う。

4. 研究成果

(1) 未解決問題の解決と新たな公理の発見

帰納法を制限した体系において、単調完備定理と同値になる原理、有界内包公理、を明らかにした。これにより、単調完備定理が論理的公理(LP0)と算術的公理(制限付き帰納法)のいずれをも導くことを示した。この結果により、構成的逆数学において論理的公理と関数(集合)の存在公理のみでなく、算術的公理も重要な役割を担っていることが明らかになった。

2進展開定理と中間値の定理と同値になる2分木に関する弱いケーニッヒの補題に対する条件、各レベル高々2つのノードおよび凸性、を解明した。それらの条件付き弱いケーニッヒの補題は、制限されたド・モルガンの法則に対応する条件付き可算選言選択公理と論理的に同値になることを明らかにした。それらの条件付き可算選言選択公理のみに同値になる弱いケーニッヒの補題を解明した。その結果、いずれの場合もそれぞれの条件付き可算選言選択公理のみに弱いケーニッヒのものが同値になるための、2文擬に対する統一的な条件を解明した。

(2) 層モデルを用いた体系的な分離手法の構築

クリプキ層モデルに焦点を絞り、それを用いて公理や定理の体系的な分離手法の構築を目指した。クリプキ層モデルはフレームと呼ばれる順序構造の上に構築されるが、公理や定理を体系的に分離するためには単に順序構造のみでは不十分であることが分かった。そのため2つの順序構造とその間の単調写像により構成される、拡張フレームの概念を提案した。拡張フレームを用いることにより、命題論理における様々な公理を体系的に分離できることを、排中律、2重否定除去、弱い排中律、ド・モルガンの法則、弱いド・モルガンの法則、制限された排中律などを例に示した。また、拡張フレーム上のクリプキ層モデルを用いて、述語論理における様々な公理を分離する手法を開発した。これにより、上記命題論理の公理を含め、命題論理式に存在命題を代入して得られる公理が体系的に分離できることを示した。さらに、その手法を1回算術台形に適用し算術体系において様々な公理を分離するための体系的な手法を開発した。

(3) 層モデルの構成的理論の構築

上記拡張フレーム上のクリプキ層モデルの構成、および分離手法のうち述語論理までの部分は1か所を除き、可術的な構成的集合論CZFの枠組みで展開できることを示した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計3件)

[1] Josef Berger, Hajime Ishihara, Takayuki Kihara and Takako Nemoto, The binary expansion and the intermediate value theorem in constructive reverse mathematics, Arch. Math. Logic,

58 (2019), 203-217, 査読有.

[2] Hajime Ishihara, On Brouwer ' s continuity principle, Indag. Math. (N.S.), 29 (2018), 1511-1524, 査読有.

[3] Hajime Ishihara, Maria Emilia Maietti, Samuele Maschio and Thomas Streicher, Consistency of the intensional level of the minimalist foundation with Church ' s thesis and axiom of choice, Arch. Math. Logic, 57 (2018), 873-888, 査読有.

〔学会発表〕(計7件)

[1] Hajime Ishihara, The constructive Hahn-Banach theorem, revisited, Constructive Mathematics, 2018.

[2] Hajime Ishihara, Constructive reverse mathematics: and introduction and recent results, Proof, Computation and Complexity, 2018.

[3] Hajime Ishihara, Reverse mathematics of non-deterministic inductive definitions, Proof and Computation, 2018.

[4] Hajime Ishihara, Coequalisers in the category of basic pairs, Third core meeting, 2018.

[5] Hajime Ishihara, Coequalisers in the category of basic pairs, 1st Swiss-Italian Workshop on Proof and Computation, 2017.

[6] Hajime Ishihara, The Hahn-Banach theorem, constructively refisited, Proof and Computation, 2017.

[7] Hajime Ishihara, On Brouwer ' s continuity principle, Asian Logic Conference, 2017.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等 特になし

6. 研究組織

(1)研究分担者

なし

(2)研究協力者

研究協力者氏名：根元 多佳子

ローマ字氏名：Takako Nemoto

研究協力者氏名：横山 啓太

ローマ字氏名：Keita Yokoyama

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。