

令和 4 年 6 月 17 日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2021

課題番号：16K05252

研究課題名（和文）構成性を中間述語論理の観点から理解する

研究課題名（英文）Understanding constructivity from the perspective of intermediate predicate logics

研究代表者

鈴木 信行（Suzuki, Nobu-Yuki）

静岡大学・理学部・教授

研究者番号：60216421

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：構成性は数理論理学の重要な主題の1つで、直観主義論理や構成的数学における基本的概念である。これを特徴的に表す選言特性(disjunction property)と存在特性(existence property)は、中間述語論理と直観主義的(構成的)数学でほぼ独立に研究されてきたが、重なる部分が見いだされた。これを梃子に研究を融合的に推進することが本研究の構想である。

学術的に特に重要な成果：構成的数学や直観主義的算術の研究者と議論し、算術的完全性定理を利用して、中間命題論理のKripkeモデルから中間述語論理のKripkeモデルを経由して直観主義的算術のモデルを構築する手法を構築した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

構成性(特にDPとEP)は、数理論理学の由緒正しい主題である。これを本研究の観点で研究することは、中間述語論理と構成的数学という、密接な関連が意識されていなかった2分野を結びつけ、さらに新しい発展をもたらす。また、構成的数学で議論されてきた概念が、中間述語論理でも意味を持ち、計算機科学との関連が知られている。その意味では、さらに分野融合的な研究に発展する可能性もあり、将来的な波及効果が期待できる。

研究成果の概要（英文）：Constructivity is one of the important subjects of mathematical logic and a fundamental concept in intuitionistic logic and constructive mathematics. The disjunction and existence properties, which characteristically express the constructivity, have been studied almost independently in intermediate predicate logic and intuitionistic (constructive) mathematics. However, a crucial overlap between them has been found. The idea of this research is to advance research using this observation as leverage.

One academically significant achievement is the following:

With researchers in constructive mathematics and intuitionistic arithmetic, we have developed a method to construct a Kripke model of intuitionistic arithmetic from a given Kripke model for intermediate propositional logic, using the Arithmetical Completeness Theorem.

研究分野：数学（数理論理学・非古典論理）

キーワード：構成性 非古典論理 述語論理 disjunction property existence property

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 構成性

構成性(constructivity)は数学の基礎をめぐる重要な主題のひとつであり、選言特性(disjunction property, DP)と存在特性(existence property, EP)は、構成性を特徴的に表現するもの(hallmarks)と考えられている。これらの特性は、数理論理学の黎明期から、直観主義論理や構成的(直観主義的)数学の理論などさまざまな対象に対して、様々な手法で繰り返し議論され続けてきている。例えば、泰斗 Gödel による引用文献は1932年に遡り、その後も現在まで活発に議論されている(例えば、今回協力をえた藤原氏の共著論文)。本研究代表者の鈴木の研究業績も、直観主義論理の拡張全体を研究対象とする中間述語論理におけるEPとDPに関する研究であり、本研究の準備が期せずして蓄積されていたことになる。ここで、本研究の発端であるEPとDPについて概説しておく。

選言特性(DP)と存在特性(EP) (cf. Kleene)

ある(形式的)理論(あるいは体系)がDPを持つとは、次が成り立つことである:

DP: 「 $A \vee B$ が証明可能」ならば「 A が証明可能であるか、または、 B が証明可能である」

ここで、 \vee は「または」を表し、選言(disjunction)と呼ばれる。古典論理上の理論では、排中律と呼ばれる公理「 $A \vee \neg A$ 」によって、DPが成立しない。例えば、 A として群論におけるアーベル群(可換性)の公理 $\forall x \forall y (xy = yx)$ を考える。 $A \vee \neg A$ は任意の群で自明に真であるが、非アーベル群では A は偽であり、アーベル群では $\neg A$ は偽である。すなわち、古典論理上の群論はDPを持たない。直観主義論理や構成的数学では、 \vee に対して構成性が要求され、その表れの1つとしてDPが現れ、そして排中律は公理でない。つまり、DPは排中律の「裏焼き」ともみなせる。排中律は古典論理の特徴的な公理から、DPの研究は数理論理学の重要な研究テーマであることが解る。EPは、 \exists (存在量化記号, existential quantifier)に対して構成性を要求することで導かれる性質である。EPは、計算機科学に関連しても重要な概念であることが知られている。

(2) 着想に至った経緯

本研究代表者(鈴木)は、中間述語論理の研究者として、その分野でのDPやEPに関する研究も行ってきた。本研究申請の時点(2015年)で、本研究代表者が中間述語論理で()、石原-根元が構成的数学で()、よく似た対象についてよく似た結果(しかし、実は異なる結果)をほぼ同時に全く異なる手法で示していることを知るに至った。これは、構成性やDPとEPが論理学の深くかつ基本的な主題であることから考えれば自然なことであるが、その時点では、本研究代表者にとっては驚きでもあった。中間述語論理と構成的数学の2つ分野は、それまで重なり合うことがなかった。しかし、現在の状況は、中間述語論理の観点からの構成性、特にEPとDPについて、上記の構成的数学の成果を視野に多層的に理解する絶好のチャンスであると思われた。

2. 研究の目的

(1) 中間述語論理と直観主義的(構成的)数学の2つの分野で独立に進展しつつ、重なり合うという部分に注目し、構成性について、これらの分野間を融合的に考察するアプローチを開発・活用して、多層的に理解を深める。

(2) 直観主義的(構成的)数学と中間述語論理の間を橋渡しする手法を導き、直観主義的(構成的)数学

と中間述語論理の、それぞれの知見と技術を互いに相手に持ち込み、それぞれの成果を相互に吸収して、それぞれの研究を前進させる。これを通じて、構成性の理解を深化させることを目指す。

3. 研究の方法

(1) 中間述語論理における Kripke 意味論は、ある種の前層としての構造を持つ。例えば、アーベル群に値を持つ前層は、アーベル群の構成的数学のモデルとなり、中間述語論理の Kripke 層モデル (Kripke sheaf model) とみなせる。さらに、その準同型から定義される自然変換は、Kripke 意味論での p-morphism という概念に相当する。また、これまで構成的数学で議論されてきた Omniscience principles (例えば、Markov's principle) など概念が、中間述語論理でも意味を持つてくるものと思われる()。(この Markov's principle は、計算機科学との関連が知られている。)

上記のような観点から、相互に2つの分野から同時に対象となる概念について、中間述語論理から直観主義的(構成的)数学へ、あるいは逆に、直観主義的(構成的)数学から中間述語論理へ、橋を架けられるよう議論を行う。

(2) 特に、「着想に至った経緯」で述べた石原-根元 で用いられている概念が、中間述語論理における概念とは、似ているが実は異なっている点が重要と考えられる。それらをいかに統一的に理解すべく議論する。

上記の(1)、(2)のいずれも、膝詰めの議論を行うことが重要である。このために、国内・国外出張を行った。(新型コロナウイルス感染症予防の観点から、後半は予定通りにできなかった。)

4. 研究成果

(1) 中間述語論理において、EP と DP が独立かどうかは、1980年代からの未解決問題(小野の問題 52 として知られている)であったが、これを解決する論文が出版できた。すなわち、中間述語論理においては EP と DP は独立である。これは、直観主義的算術における有名な結果 とコントラストをなすものである。また、Z 正規性(Z-normality)という概念を導入した。意味論的に自然に定義できる多くの中間述語論理は、Z 正規であることがわかる。そして、EP と Z 正規性をともに持てば、DP が導かれることを証明した。これによって、意味論的に自然に定義できる多くの中間述語論理は、EP を持てば自動的に DP を持つこと、また、自然な意味論的手法では、DP と EP の独立性を示すことが困難であったことの理由の一端が理解できた。

(2) 構成的数学で議論されてきた Omniscience principles (例: Markov's principle)は、構成性を捉え直す、あるいは拡張する原理であると考えられる。こうした原理に対して、中間述語論理における完全な対応物はないが、構成的数学での instance と中間述語論理の axiom schema には、heuristic な翻訳関係であれば具体例ごとに構築できる。これらのうち、重要と思われるものを考察の対象とした。ここで報告するうえで重要なものを例示する：

	Omniscience Principles
the limited principle of omniscience (LPO)	$\forall x(A \vee \neg A) \rightarrow \exists xA \vee \neg \exists xA$
the weak limited principle of omniscience (WLPO)	$\forall x(A \vee \neg A) \rightarrow \neg \exists xA \vee \neg \neg \exists xA$
Markov's principle (MP)	$\forall x(A \vee \neg A) \rightarrow (\neg \neg \exists xA \rightarrow \exists xA)$

LPO と WLPO 含意(\rightarrow)の右辺は、比較的取り扱いの容易な中間命題論理の Kripke 枠モデル(Kripke frame model)を用いて分離可能である。しかし、LPO と MP における \rightarrow の右辺は、そうはいかないことに注意する。とは言え、中間命題論理の Kripke 枠モデルの取り扱いの容易さをうまく利用することができれば、中間論理にとどまらずに、有効性が見いだされることになる。そのような目論見に挑戦が可能になったのは、上記の「着想に至った経緯」が大きいことを付記しておく。

中間命題論理の Kripke 枠モデルを、中間述語論理の Kripke 枠モデルに書き直す手法について整理と考察を行い、中間述語論理の付加的公理型として考えた Omniscience principles (例え

ば上記の LPO, WLP0, MP など) について、比較分離の方法を与えた。中間命題論理の Kripke 枠モデルを、構成的数学の拡張理論の Kripke 枠モデルに書き直す手法について考察を行い、一定の成功を見た。例えば、上記のなどがうまく対応する。この場合の「構成的数学の拡張理論」は、(直観主義ベースの) 述語論理の拡張版になっており、中間述語論理あるいは超直観主義的述語論理の部分体系になると考えるのが自然である。そして、このような視点は、これまでの中間述語論理の議論では注視されることなく飛び越えてしまっていることに注意する。その意味で、より発展した精密化された議論ができたものと考えられる。さらに議論を進め、中間命題論理の Kripke モデルから中間述語論理の Kripke モデルを経由して直観主義的算術(Heyting arithmetic)のモデルを構築する手法を見出した。直観主義的算術の研究者とも議論を行い、直観主義的算術とその拡張の証明論的・意味論的議論の関係を議論し、中間述語論理算術のモデルを生成することを考察した。このとき、ペアノ算術の理論での重要な定理である算術的完全性定理(arithmetical completeness theorem)を利用できることが解った。さらに進んだ分野融合的成果と言える。こうした成果を共著論文にまとめ、現在投稿中である。

上記の例を用いて図にすると、以下の図 1 のようになる。公理型としての含意関係を表す \Rightarrow はすべて proper で、付け足すことはできないことまでわかっている。例えば、MP と WLP0 は互いに独立である。

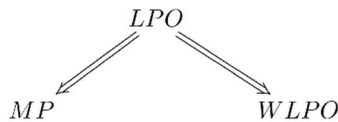


図 1

(2)の成果は、石原哉、根元多佳子、藤原誠、横山啓太各氏との深い議論によってなされたものであり、共著論文を投稿中である。記して深い謝意を表す。

(3)中間述語論理における DP と EP の弱い変種 (wEP, sEP) および Z 正規性の組み合わせに相互関係について調べた。その際、中間述語論理の Kripke 層モデルが有効に機能した。この成果は、本研究からの影響で成功できた部分でもあり、本研究全体の下支えにもなった。得られた相互関係は次の図 2 のようになる。

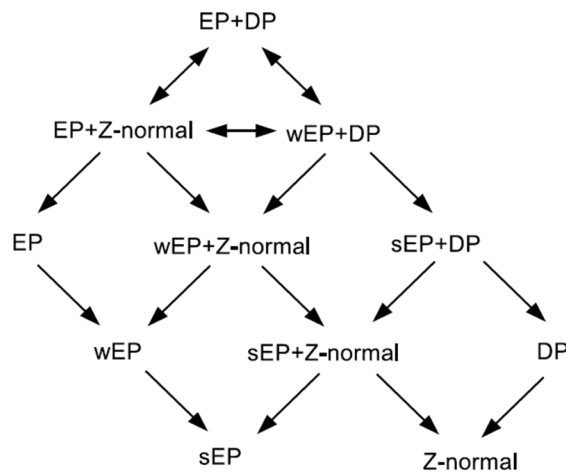


図 2

<引用文献>

- Friedman, H., *The disjunction property implies the numerical existence property*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America vol.72(1975), 2877-2878.
- Fujiwara, M. and Kurahashi, T., *Prenex normal form theorems in semi-classical arithmetic*. Journal of Symbolic Logic Vol.86(2021), no.3, 1124-1153.
- Gödel, K., *Zum intuitionistischen Aussagenkalkül*, Anzeiger der Akademie der Wissenschaftlichen in Wien, 69(1932), 65-66.
- Ishihara, H. and Nemoto, T., *A note on the independence of premiss rule*, Mathematical Logic Quarterly 62(2016) 72-76.
- Ishihara, H. and Nemoto, T., *Some principles weaker than Markov's principle*, Archive for Mathematical Logic, 54(2015), 861-870.
- Kleene, S. C., *Disjunction and existence under implication in elementary intuitionistic formalisms*, Journal of Symbolic Logic vol.27(1962), 11-18. (An addendum, 28(1963), 154-156.)
- Suzuki, N.-Y., *Some properties related to existence property in intermediate predicate logics*, Logic Colloquium 2014, (2014年7月14日於: Vienna, Austria)
- Suzuki, N.-Y., *Axiom schema of Markov's principle preserves disjunction and existence properties*, The 5th Computability Theory and Foundations of Mathematics (CTFM) 2015, Conference, September 7-11, 2015, Tokyo Japan

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Suzuki Nobu-Yuki	4. 巻 23
2. 論文標題 A Negative Solution to Ono's Problem P52: Existence and Disjunction Properties in Intermediate Predicate Logics	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Hiroakira Ono on substructural logics: Outstanding Contributions to Logic	6. 最初と最後の頁 319 ~ 337
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-76920-8_9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 鈴木信行	4. 巻 2150
2. 論文標題 中間述語論理における選言特性と存在特性およびKripke 完全性に関する注意	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 56 ~ 65
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 HU TAI-WEI, KANEKO MAMORU, SUZUKI NOBU-YUKI	4. 巻 -
2. 論文標題 SMALL INFINITARY EPISTEMIC LOGICS	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 The Review of Symbolic Logic	6. 最初と最後の頁 1 ~ 34
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S1755020319000029	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Suzuki Nobu-Yuki	4. 巻 46
2. 論文標題 Some Weak Variants of the Existence and Disjunction Properties in Intermediate Predicate Logics	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Bulletin of the Section of Logic	6. 最初と最後の頁 93-109
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.18778/0138-0680.46.1.2.08	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計20件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 鈴木信行
2. 発表標題 Prenex normal form theorem を超直観主義述語論理で考える
3. 学会等名 第 56 回 MLG 数理論理学研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 鈴木信行
2. 発表標題 超直観主義述語論理における Prenex normal form theorem に関する覚書
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所 研究集会「証明と計算の理論とその応用」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 鈴木信行
2. 発表標題 中間述語論理における選言特性と存在特性
3. 学会等名 日本数学会 2020年度秋季総合分科会（数学基礎論分科会）（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 鈴木信行
2. 発表標題 Kripke 枠不完全かつ代数的不完全な中間述語論理をたくさん作っていた
3. 学会等名 日本数学会 2019年度秋季総合分科会（数学基礎論分科会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 鈴木信行
2. 発表標題 Shehtmanの問いから始まる話
3. 学会等名 第54回MLG数理論理学研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 鈴木信行
2. 発表標題 中間述語論理における選言特性と存在特性およびKripke完全性に関する注意
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所 研究集会「証明論その周辺」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 N.-Y. Suzuki
2. 発表標題 Existence and disjunction properties in intermediate predicate logics
3. 学会等名 Colloquium at Departments of Philosophy I and II of Ruhr University Bochum (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 鈴木信行
2. 発表標題 中間述語論理における選言特性とその弱い変種についての注意
3. 学会等名 日本数学会 2018年度秋季総合分科会 (数学基礎論分科会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 鈴木信行
2. 発表標題 中間述語論理における選言特性と2つの弱い変種について
3. 学会等名 第53回MLG数理論理学研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 鈴木信行
2. 発表標題 選言特性を持ち存在特性を持たない中間述語論理についてのもうひとつの注意
3. 学会等名 日本数学会 2019年度年会(数学基礎論分科会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nobu-Yuki Suzuki
2. 発表標題 A remark on predicate extensions of intuitionistic logic
3. 学会等名 Second Workshop on Mathematical Logic and its Applications (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 鈴木信行
2. 発表標題 Disjunction propertyを持ちexistence propertyを持たない中間述語論理
3. 学会等名 第52回MLG数理論理学研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 藤原誠, 石原哉, 根元多佳子, 鈴木信行, 横山啓太
2. 発表標題 Separation of non-constructive principles and Kripke models
3. 学会等名 第52回MLG数理論理学研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 鈴木信行
2. 発表標題 存在特性を持ち選言特性を持たない中間述語論理について
3. 学会等名 第5回 山陰 基礎論・解析学 研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 鈴木信行
2. 発表標題 存在特性を持ち選言特性を持たない中間述語論理をたくさん作る
3. 学会等名 日本数学会 2018年度年会(数学基礎論分科会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Nobu-Yuki Suzuki
2. 発表標題 Relations among some weak variants of existence and disjunction properties in intermediate predicate logics
3. 学会等名 Logic Colloquium 2016 (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 鈴木信行
2. 発表標題 中間述語論理におけるdisjunction propertyとexistence propertyのいくつかの弱い変種について
3. 学会等名 日本数学会 2016年度秋季総合分科会（数学基礎論分科会）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Nobu-Yuki Suzuki
2. 発表標題 Some weak variants of existence and disjunction properties in intermediate predicate logics
3. 学会等名 第51回MLG数理論理学研究集会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 鈴木信行
2. 発表標題 Omniscience principlesに関する中間述語論理からの注意
3. 学会等名 第4回 山陰 基礎論・解析学 研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 鈴木信行
2. 発表標題 中間述語論理における公理型としてのomniscience principles
3. 学会等名 日本数学会 2017年度年会(数学基礎論および歴史分科会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------