

平成 31 年 4 月 26 日現在

機関番号：14403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05253

研究課題名(和文)作用素論に基づいた量子情報理論における幾何学的構造に関する研究

研究課題名(英文)The study on geometrical structure in quantum information theory based on Operator Theory

研究代表者

瀬尾 祐貴 (Seo, Yuki)

大阪教育大学・教育学部・教授

研究者番号：90439290

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、ヒルベルト空間上の作用素不等式及び行列解析の手法を基にして、情報幾何学や量子情報理論などの分野の様々な幾何学的様相に絡んだ定量的な評価を中心に考察し、作用素論的な枠組みの構築とその幾何学的構造を解明するために、2変数版のAndo-Hiai型不等式の負べき版を導き、量子情報理論におけるTsallis相対エントロピーの諸性質を解明し、さらに非可換版の幾何平均の様相をノルム不等式の枠組みで明らかにした。また、多変数版の作用素幾何平均の理論を構築し、Ando-Hiai型不等式を導いた。これに関連して、行列値内積におけるコーシー・シュワルツ不等式の精密化とその応用を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

幾何学的な観点からの情報幾何学の研究はあまりなされていないとはいえ、ヒルベルト空間上の線形作用素の枠組みで定式化を試みることは、これまでの作用素論が築いてきた基礎理論との十分な連携を意味し、今回の研究成果のひとつである。そして、作用素不等式からの視点で、その非可換構造の研究と、凸関数に関するJensenの不等式の非可換化の考察が、多変数版の作用素平均の性質を調べるのに有効であることも示した。その成果によって、情報幾何学や量子情報理論に関連する幾何学的考察に適用できたことは数学の基礎理論の重要性を示す上で重要である。Webページを通じて海外の多くの研究者がこれらの成果を閲覧している。

研究成果の概要(英文)：In this research, based on the method of operator inequalities on Hilbert spaces, we discuss mainly on the quantitative evaluation related to various geometrical aspects in the fields such as information geometry and quantum information theory. Our aim is to elucidate the framework of operator theory and to elucidate its geometrical structure.

For this, we show two-variable version of Ando-Hiai type inequality for negative order, and elucidate the properties of Tsallis relative entropy in quantum information theory, and further we clarified the aspect of noncommutative geometric mean in the framework of norm inequality. We also constructed the theory of multivariate operator geometric mean and derived the Ando-Hiai type inequality. Also, we showed the refinement of Cauchy-Schwarz inequality via matrix valued inner product based on the matrix geometric mean. As applications, we show Lin's type refinements and matrix Wielandt inequality.

研究分野：解析学基礎 / 作用素論

キーワード：作用素論 作用素不等式 行列幾何平均 作用素平均 多変数幾何平均 Tsallis相対エントロピー

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景：申請者は過去、研究してきた作用素平均・作用素不等式の基礎的な結果を、2012年に、Element社のMonographsシリーズの第4巻として1冊にまとめ、MondとPecaricが共同で開発していたエンゼンの不等式の逆関係不等式をより一般的な枠組みで捉えることにより、その方法をMond-Pecaricの手法として確立し、ヒルベルト空間上の作用素そのものの不等式や作用素ノルム不等式などをもう一段階、上の視点から考察を行い、様々な結果を統合、整理した。そのような流れの中で、近年、工学、情報幾何学、量子情報理論などの分野の作用素論的な枠組みの構築の密接な関連の必要性が喫緊の課題として上がってきている。しかし、情報幾何学や量子情報理論におけるさまざまな幾何学的内容は、ヒルベルト空間上の線形作用素の枠組みの中では、必ずしも具体的に明らかになっていない。また、行列や作用素の文脈での様々なエントロピーやダイバージェンスなどの評価を中心とした研究も進んでいるとは言えない。また、近年、作用素平均の多変数化は目覚ましく進展し、そのn変数版の作用素幾何平均の定式化が確立された。一方、作用素平均のpathは幾何学的に測地線になっていることを、Corach-Porta-Rechtらが指摘したが、ファイバー束をベースとした考察だったためか、それ以降発展が余りなかった。その後、Bhatia-Holbrook, Hiai-Petzらが、正定値行列のRiemann計量との関連で、幾何学的考察を始め、その空間上の測地線を求めるなど、再び幾何学的な考察が注目され始めた。このように、「作用素論」の枠組みにおいて、情報幾何学や量子情報理論における基礎研究は十分な体制が作られている。

2. 研究の目的：研究開始当初の背景を鑑みた場合、ヒルベルト空間上の作用素不等式や行列解析で研究してきた手法をもとにして、情報幾何学や量子情報理論などの分野のさまざまな幾何学的様相に絡んだ定量的な評価を中心に考察し、作用素論的な枠組みの構築と、それらの分野との関連を明らかにし、応用を広げることは極めて重要なことである。そこで、本研究では、ヒルベルト空間上の線形作用素に対する作用素不等式の成果をもとに、情報幾何学や量子情報理論などの分野における幾何学的構造の解明を目的とする。具体的には以下のことを明らかにする。

- (1) このような幾何学的な観点から、情報幾何学の研究を、ヒルベルト空間上の線形作用素の枠組みの中で定式化を試みること。
- (2) これまでの作用素論が築いてきた基礎理論との十分な連携を構築すること。
- (3) 測地線の幾何学的考察の作用素不等式の観点から、情報幾何学や量子情報理論を、行列・作用素の枠組みで新たに捉え直し、その定量的な評価を中心に考察を行う。
- (4) さらに、情報幾何学や量子情報理論の分野との関連を明確化し、作用素論的な視点でその応用を広げることを目指す。

3. 研究の方法：初年度は、研究分担者である藤井淳一氏との研究集会の開催を通じた研究交流や資料収集を中心として、作用素論的な視点で、情報幾何学や量子情報理論の枠組みを明確化するための土台作りとする。2年目からは、初年度の資料・研究に基づいて、作用素論と情報幾何学との分野の融合によって生じる新しい観点から得られる不等式の開発を目指す。最終年度は、過去2年間の総仕上げとして、国内外の研究者との研究交流を踏まえて、成果の発表を国際学会や国内の研究集会及び論文発表を通じて行う。予想外にうまく結果が出ない場合には、その分析を行い、さらなる発展に備えたい。もう少し、詳しく述べると、作用素不等式におけるこれまでの成果を踏まえ、その応用として、幾何学的な考察に基づいて、情報幾何学や量子情報理論との関連性やその応用、多変数幾何平均の理論とのかかわりを通して、作用素論的な視点から情報幾何学の幾何学的な構造の解明を目指す。そのために、初年度は、現在精力的に作用素論と情報幾何学との関連を研究されている藤井淳一氏と、共同で、研究を行い、この課題に精力的に取り組む。藤井淳一氏は、これまでの科研(基盤研究(C)(一般))での研究成果をもとに、作用素論と情報幾何学との基本的な道具立てを揃えることに成功している。申請者は、ヒルベルト空間上の有界線形作用素及び行列に関する作用素(行列)不等式とその応用に関する研究を進めてきたが、今回、申請者の作用素不等式の視点をもとに、情報幾何学、量子情報理論、信号解析理論の基礎研究に、さらにもう一步踏み込んで、それらの幾何学的構造を明らかにし、その応用や従来の概念との関連性を見出していきたいと考えている。申請者は、多変数作用素幾何平均を作用素不等式の視点で、その非可換性やそれらの作用素論的な性質を明確にした。その結果は、愛媛大学で行われた日本数学会の2013年度秋季年会の特別講演として発表を行った。作用素論を取り巻く状況の中で、申請者の数学的な位置づけを説明できると思うが、その成果を、他分野、特に情報幾何学や量子情報理論および信号解析理論とのかかわりにおいて発揮したいと考えている。

4. 研究成果：雑誌等に掲載された、当該研究課題に密接に関係する論文の内容の概略は、下記のとおりである。

(1) Karcher方程式の解の唯一性とKarcher幾何平均の自己共役性

LawsonとLimは、可逆な正作用素に対して、Karcher方程式が唯一の解を持つことを、バナッハ空間の陰関数定理を用いて、示した。私たちは、作用素不等式の枠組みで、可逆な正作用素に対するKarcher方程式の解の唯一性とKarcher幾何平均の自己共役性の同値関係を示した。そのために、負冪のTsallis相対作用素エントロピーの価値によって、負パラメーターの作用

素べき平均の概念を改良した。しかし、可逆とは限らない正作用素に対する Karcher 方程式の解の唯一性についてはまだ未解決である。可逆でない正作用素に対する Karcher 幾何平均の定式化は、まだまだ克服すべき課題がたくさんあり、今後、この方面の研究も深めていきたい。

(2) 負パラメータをもつ Tsallis 相対エントロピーに関するトレース不等式について

半正定値行列の擬幾何平均を含む負冪の量子 Tsallis 相対エントロピーに関するトレース不等式を示す。これにより、Umegaki 相対エントロピーと Fujii-Kamei による相対作用素エントロピーから誘導される FK 相対エントロピーの関係がより明確になった。また、それらの差の評価を Kantrovich 係数を用いて定式化をした。そのために、負冪の幾何平均に対する Ando-Hiai 型不等式の定式化に成功した。この定式化により、行列幾何平均とカオティック幾何平均、及び行列の積による幾何平均などの行列ノルムや、トレースノルムの関係を明らかにした。量子情報理論におけるエントロピーなどの定量化は、この作用素論的な解析の方法がある程度有効であることをこの研究で明らかにできた。さらに、この方面の研究を進めたい。

(3) 作用素幾何平均を用いた作用素値内積に関するコーシー・シュワルツの不等式

藤井によるコーシー・シュワルツの作用素不等式の価値により、私たちは、作用素幾何平均を用いて加重混合シュワルツの作用素不等式を示し、さらに、Lin 型の拡張を示した。応用として、ある直交性の仮定の下で、加重混合シュワルツの作用素不等式を精密化する Wielandt 型の作用素不等式を示した。さらに、Bhatia-Davis による定式化とは異なる、作用素幾何平均を用いた分散・共分散作用素不等式を示し、それらの差や上限を与えられた作用素のスペクトルを用いて評価をした。最後に、この定式化の下で、単位的完全正写像に関する Robertson 型の不等式を導いた。これは、制限された条件下で、Schrodinger 型不等式を導く。このような、作用素(行列)空間上の幾何学的構造を把握するうえで、この研究の果たす役割は大きい。さらに、作用素論的な観点で、新しい定式化とその応用的な視点を深めていきたい。

(4) 今後の展開

上記で、記したような結果を、さらに深めていくことが、今後の当面の課題である。多変数版の作用素幾何平均に対する一般的な Ando-Hiai 型不等式の構成は、作用素空間上の幾何構造を解析する上で、重要な位置を占めると考えられる。従って、一般の作用素幾何平均でない perspective やその多変数版の構成は今後の課題である。また、これらの研究を通じて、幾何学的な観点からの情報幾何学や情報理論の研究を、作用素論の枠組みで解明をしていきたい。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 10 件)

Yuki Seo, Matrix trace inequalities on Tsallis relative entropy of negative order, Journal of Mathematical Analysis and Applications. Volume 472, Issue 2, 2019, pp.1499-1508. 査読有

Masayuki Fujimoto and Yuki Seo, The Schwarz inequality via operator-valued inner product and the geometric operator mean, Linear Algebra and its Applications, Vol.561 (2019), 141-160. 査読有

Fumio Hiai, Yuki Seo and Shuhei Wada, Ando-Hiai type inequalities for multivariate operator means, to appear in Linear and Multilinear Algebra. 査読有 (印刷中)

Jun Ichi Fujii and Yuki Seo, The relative operator entropy and the Karcher mean, Linear Algebra and its Applications, 542 (2018), 4-34. 査読有

Jun Ichi Fujii and Yuki Seo, The unique solution of the Karcher equation and the self-adjointness of the Karcher mean, Linear and Multilinear Algebra. Published online: 15 Feb 2018 <https://doi.org/10.1080/03081087.2018.1440520> 査読有

Masayuki Fujimoto and Yuki Seo, Matrix Wielandt inequality via the matrix geometric mean, Linear and Multilinear Algebra, 66(2018)-Issue-8,1564-1577. 査読有

Yuki Seo, The Hadamard Product and the Karcher mean of positive invertible operators, Publ. RIMS Kyoto Univ. (Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ.), Issue 1, 53(2017), 65-78. 査読有

Mahdi Dehghani, Mohsen Kian and Yuki Seo, Matrix power means and its information monotonicity, Linear Algebra and its Applications 521 (2017), 57-69. 査読有

Jun Ichi Fujii and Yuki Seo, Tsallis relative operator entropy with negative parameters, Advances in Operator Theory 1 (2016), no.2, 219-236. 査読有

Jun Ichi Fujii, Masatoshi Fujii, Yuki Seo and Hongliang Zuo, Recent developments of matrix versions of the arithmetic-geometric mean inequality, Annals of Functional Analysis, 7(2016), no.1, 102-117. 査読有

〔学会発表〕(計 10 件)

瀬尾祐貴 幾何平均に関する行列ノルム不等式(発表)日本数学会 2019 年度春季総合分科会(函数解析学分会)東京工業大学大岡山キャンパス 2019 年 3 月 19 日

瀬尾祐貴 Matrix trace inequalities on Tsallis relative entropy of negative order 作用素論・作用素環論研究集会 2018 年 12 月 15 日(土)静岡大学

瀬尾祐貴 作用素値内積に関するシュワルツの不等式の一般化について(発表)RIMS 共同研究(公開型)作用素平均を利用した作用素の構造解析の研究と関連する話題 京都大学数理解析研究所 2018 年 10 月 26 日(金)

瀬尾祐貴 負パラメータをもつ量子 Tsallis 相対エントロピー(発表)日本数学会 2018 年度秋季総合分科会(函数解析学分会)岡山大学津島キャンパス 2018 年 9 月 25 日(火)

瀬尾祐貴 藤本将行 作用素幾何平均を用いた加重混合シュワルツ不等式(発表)日本数学会 2018 年度春季総合分科会(函数解析学分会)東京大学大学院数理科学研究科 2018 年 3 月 20 日

瀬尾祐貴 Tsallis relative operator entropy of negative order(発表) 2017 年度 JMM ワークショップ「応用函数解析」城西大学理学部(1 号館)406 教室 2017 年 11 月 25 日(土)

藤井淳一 瀬尾祐貴 Tsallis relative operator entropy of negative order(発表) RIMS 共同研究(公開型) BANACH 空間に基づく技法による作用素論の最近の研究と関連する話題 京都大学数理解析研究所 2017 年 10 月 24 日(火)

Yuki Seo, The relative operator entropy and Karcher means, 20th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS), 2016 July 13, KU Leuven, Belgium

瀬尾祐貴 Operator power means and the information monotonicity 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会(函数解析学分会)2016 年 9 月 16 日(金) 関西大学

藤井淳一 瀬尾祐貴 多変数作用素平均の共役とべき平均(発表)RIMS 研究集会 京都大学数理解析研究所 2016 年 11 月 10 日(木)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等：<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~yukis/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：藤井淳一

ローマ字氏名：(Fujii, jun-ichi)

所属研究機関名：大阪教育大学

部局名：教育学部

職名：教授

研究者番号(8桁): 60135770

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。