様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　６ 月　９ 日現在

機関番号：１６４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2020
課題番号：１６Ｋ０５２５４

研究課題名（和文）色の偏りに着目したグラフ構造の研究

研究課題名（英文）Study of color distribution ratios on colored graph structures

研究代表者
鈴木　一弘（Suzuki, Kazuhiro）

高知大学・教育研究部自然科学系理工学部門・講師

研究者番号：５０５１４４１０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：g,fを色集合から非負整数集合への写像としたとき、どの色ｃの辺数もg(c)以上f(c)以下となる辺着色グラフを(g,f)-着色グラフと呼ぶ。辺着色完全グラフが丁度m個の連結成分からなる(g,f)-着色全域林を持つための十分条件を示した。辺着色完全グラフに自身の配色比率と同じ配色比率を持つ全域木が存在するための必要十分条件を示した。どんな辺着色完全グラフにも自身の配色比率とほぼ同じ配色比率を持つ全域木が存在することを示した。どんな2n頂点辺着色完全グラフ（n≧3)も自身の配色比率とほぼ同じ配色比率を持つ辺素なn個の全域木に分解できると予想し、ある辺着色完全グラフについて予想が正しいことを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
すべての色が異なるグラフを虹色グラフという。言い換えればどの色も高々1本までしか塗られていないグラフである。本研究の貢献の一つは、虹色部分グラフを一般化した(g,f)-部分グラフを定義することで辺着色グラフ研究の研究対象を広げたことである。この定義により、各色ごとに塗られていても良い辺の数をコントロールできるようになり応用範囲が広がることが期待できる。例えば、通信ネットワーク等、複数のタイプのノードやリンクで構成されたヘテロジニアスネットワーク（heterogeneous network）が持つべき部分構造の分析は、タイプを色と見なした(g,f)-着色部分グラフの問題に帰着できるかもしれない。

研究成果の概要（英文）：Let g and f be mappings from a color set to the set of non-negative integers. A graph with at least g(c) and at most f(c) edges for each color c is said to be (g,f)-chromatic graph. In this study, we showed a sufficient condition for an edge-colored complete graph to have a (g,f)-chromatic spanning forest with exactly m components, and a necessary and sufficient condition for an edge-colored complete graph G to have a spanning tree whose the color distribution ratio is the same as that of G. Moreover, we showed that any edge-colored complete graph G has a spanning tree whose the color distribution ratio is similar to that of G. We conjectured that any edge-colored complete graph G of order 2n can be decomposed into n edge-disjoint spanning trees where each tree has a color distribution ratio similar to that of G, and showed that it is true for a special coloring of G.

研究分野：グラフ理論

キーワード：グラフ理論　辺着色　辺彩色　単色　虹色　(g,f)-着色　全域木　完全グラフ

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

グラフ着色分野は、地図を 4 色で塗り分ける「四色問題」や、6 人集まれば互いに知り合いの 3 人組、もしくは互いに見ず知らずの 3 人組が作れるという「パーティ問題」を筆頭に、古くから数学者に限らず多くの人達からの注目を集めている分野である。

「パーティ問題」は、6 人を 6 個の頂点で表現し、頂点同士が知り合いならば赤辺でつなぎ、そうでなければ青辺でつないだ時、そのグラフには単色三角形、即ち、赤い三角形または青い三角形があるか？という辺着色問題として考えることができる。同様に、単色なサイクルやパスや木など様々な単色部分グラフの存在が研究されている。

単色部分グラフとは、「全ての辺の色が同じ」部分グラフのことである。一方、単色の反対、即ち「全ての辺の色が異なる」部分グラフを虹色部分グラフと呼ぶ。1996 年に Brualdi ら[1]は完全グラフにおける虹色全域木（全頂点を覆う木であり全ての辺の色が異なるもの）の存在に関する次の予想（以下 BH 予想）を発表した。

BH予想 [Brualdi and Hollingsworth[1], 1996]

$2n-1$色で辺彩色された$2n(n \geqq 3)$頂点完全グラフの辺集合は、辺素な（共通の辺を含まない）n個の虹色全域木に分解することができる。

ここで、辺彩色とは、隣接する辺同士、即ち共通の端点を持つ辺同士の色が異なるように辺着色することを言う。言い換えれば、どの頂点に注目してもその頂点に接続している全ての辺の色が異なるように辺着色することである。辺彩色された 6 頂点完全グラフの虹色全域木分解の例を図１に示す。

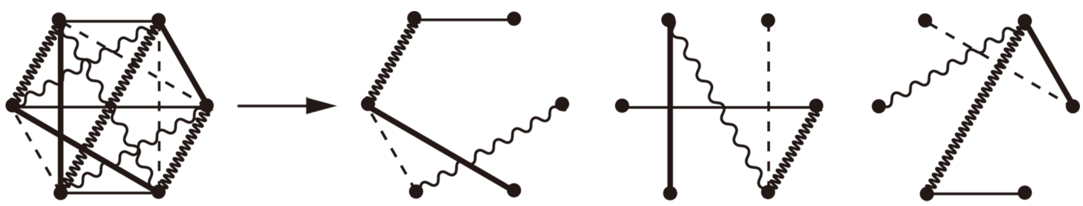

図 1　BH 予想（$2n = 6$の場合の例）

Brualdi らは同論文の中で、2 個の虹色全域木の存在を証明している。2000 年に Krussel ら[2]は 3 個の虹色全域木の存在を示した。4 個以上のケースは現時点でも未解決である。そこで、十分多くの頂点を持つ完全グラフについて多くの辺素な虹色全域木の存在を示す研究が専ら行われている。一方で、研究代表者は、完全グラフに限らず辺彩色にも限らない一般の辺着色グラフに虹色全域木が１個以上存在するための必要十分条件を発見し証明した[3]。

単色や虹色であるという条件は極端すぎるため応用範囲が限られる。虹色部分グラフは、言い換えればどの色も高々1 本しか許されないような部分グラフのことである。そこで過去に研究代表者は虹色部分グラフを ”色の偏りを許さないグラフ ”とみなす新しい視点に気付き、色の偏りの許容範囲を指定できるようにした次の定義を新たに提案した。

定義：(g,f)-着色部分グラフ

各色ごとに許容できる辺数を指定する写像として、色集合$\mathbb{C}$から非負整数集合への二つの写像g,fが予め用意されているとき、どの色$c \in \mathbb{C}$の辺数も$g(c)$以上$f(c)$以下であるような部分グラフを(g,f)-着色部分グラフと呼ぶ。

任意の色$c \in \mathbb{C}$に対し$g(c) = 0, f(c) = 1$の時、(g,f)-着色部分グラフは虹色部分グラフである。図２に(g,f)-着色全域木の例を示す。色集合を$\mathbb{C} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$とし、写像$g,f$を次のように定義する。

$g(1) = 1$、$g(2) = 1$、$g(3) = 2$、$g(4) = 0$、$g(5) = 0$、$g(6) = 1$、$g(7) = 0$

$f(1) = 3$、$f(2) = 2$、$f(3) = 3$、$f(4) = 0$、$f(5) = 0$、$f(6) = 1$、$f(7) = 2$

すると、このグラフには、どの色cの辺数も$g(c)$以上$f(c)$以下であるような全域木が存在する。

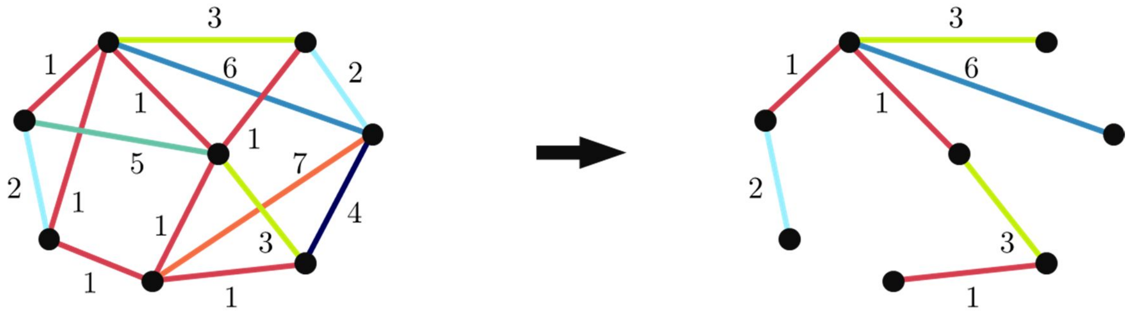

図 2　辺着色グラフの(g, f)-着色全域木

この定義のもと、研究代表者は一般の辺着色グラフに(g, f)-着色全域木が存在するための必要十分条件を含む以下の定理を発見し証明した[4]。

定理 [鈴木[4], 2019]

色集合$\mathbb{C}$の色で辺着色されたn頂点のグラフGにm個の連結成分からなる(g, f)-着色全域林が存在するための必要十分条件は、任意の色$c \in \mathbb{C}$について$g(c) \leqq f(c)$であり、$m \leqq n - \sum_{c \in \mathbb{C}} g(c)$を満たし、さらに、任意の色集合$R \subseteq \mathbb{C}$について、$R$に含まれる色が塗られた辺を$G$から全て除去したグラフの連結成分数が高々

$$\min\{m + \sum_{c \in R} f(c), n - \sum_{c \in \mathbb{C} - R} g(c)\}$$

となることである。

この定理は、虹色全域木が存在するための必要十分条件も含んでいる。虹色部分グラフの従来の研究は、完全グラフや完全二部グラフなど特定のグラフのクラスに対して辺彩色などの特定の方法で着色した場合に限定したものであったが、この定理は一般のグラフ、一般の着色に対する必要十分条件を明らかにした。

上述の一般化によって、写像g, fに応じた段階的な研究が可能となった。即ち、虹色全域木の「どの色も高々1 本まで」という非常に強い制限を、写像g, fを用いて柔軟に設定できるようにすることで、緩い本数制限から徐々に強くしていくという段階的な解決を図るという手法によってBH 予想の研究の進展が期待できる。さらには、既存の虹色部分グラフの問題が全て(g, f)-着色部分グラフの問題に刷新でき、それら全ての問題において、写像g, fの条件による段階的な研究ができるようになり、新たな着色分野として開拓されていくことが期待される。

これは、過去にグラフの 1-因子（完全マッチング）から始まった因子研究分野が(g, f)-因子という新定義の登場によって飛躍的に発展した歴史によく似ている。

２．研究の目的

本研究では、これまで研究されていなかった「辺着色グラフの色の偏り」をテーマとする。辺着色グラフの配色比率、即ち、各色cの辺がそれぞれどういう比率で存在しているかは、そのグラフの辺の総数と色cの辺数との比で評価できる。本研究の目的は、辺着色完全グラフには自身と同じ、あるいは自身と似た配色比率の全域木が存在するための条件やそのような全域木が辺素にいくつ存在するかを調べることである。

３．研究の方法

(g, f)-着色全域木の必要十分条件を用いて、辺着色完全グラフが(g, f)-着色全域木を持つ十分条件を調べ、gとfを具体的に定めて配色比率をコントロールすることで自身と似た配色比率の全域木の存在を調べる。

BH 予想を任意の辺着色完全グラフへ拡張し、特殊な辺着色完全グラフに対して予想を証明する。

４．研究成果

辺着色完全グラフが丁度m個の連結成分からなる(g,f)-着色全域林を持つためのgとfに関する次の十分条件を示した。ここで、$E_c(G)$はグラフGの色cの辺の集合を表す。

定理［鈴木[4]、2019］

G を頂点数がnの辺着色グラフとする。g,fを色集合$\mathbb{C}$から非負整数集合への写像とする。mをn以下の正整数とする。このとき、$|E(G)| > \binom{n-m}{2}$、かつ、任意の色$c \in \mathbb{C}$に対し

$$g(c) \leq \frac{|E_c(G)|}{|E(G)|}(n-m) \leq f(c)$$

ならば、Gは丁度m個の連結成分からなる(g,f)-着色全域林を持つ。

また、この条件式を用いて、任意の辺着色完全グラフが自身と似た配色比率の全域木を持つことを示す次の定理を証明した。

定理［鈴木[4]、2019］

辺着色完全グラフK_nは次の条件を満たす全域木Tを持つ。

任意の色$c \in \mathbb{C}$に対し

$$\left\lfloor \frac{|E_c(K_n)|}{|E(K_n)|}(n-1) \right\rfloor \leq |E_c(T)| \leq \left\lceil \frac{|E_c(K_n)|}{|E(K_n)|}(n-1) \right\rceil$$

を満たす。

さらに、この定理から、任意の辺着色完全グラフが自身と全く同じ配色比率の全域木を持つための必要十分条件を発見した。

定理［鈴木[4]、2019］

辺着色完全グラフK_nが自身と全く同じ配色比率の全域木を持つための必要十分条件は、任意の色$c \in \mathbb{C}$に対して$|E_c(K_n)|$が$n/2$の整数倍であることである。

次に、BH 予想を次のように一般化した。辺彩色に限らない任意の辺着色完全グラフが自身と似た配色比率の全域木で分解できることを予想したものである。例を図 3 に示す。

一般化 BH 予想［鈴木[4]、2019］

任意の辺着色完全グラフ$K_{2n} (n \geq 3)$の辺集合は、次の条件を満たす辺素なn個の全域木$T_1, T_2, \dots, T_n$に分解できる。

各T_iにおいて、任意の色$c \in \mathbb{C}$に対し

$$\left\lfloor \frac{|E_c(K_{2n})|}{|E(K_{2n})|}(2n-1) \right\rfloor \leq |E_c(T_i)| \leq \left\lceil \frac{|E_c(K_{2n})|}{|E(K_{2n})|}(2n-1) \right\rceil$$

を満たす。

そして、この予想が成り立つ興味深い辺着色完全グラフの存在を証明した。例を図 4 に示す。

定理［鈴木[5]、2020、論文執筆中］

n-ビット列を頂点とする完全グラフK_{2^n}の各辺xyをxとyのハミング距離で着色すると、自身と全く同じ配色比率の辺素で互いに同型なn個の全域木$T_1, T_2, \dots, T_{2^{n-1}}$に分解できる。

本研究により、これまで研究されてこなかった「辺着色グラフの色の偏り」に関して上述の成果が得られた。単色や虹色を拡張した結果はより広範な応用が期待できる。例えば、ビット列を頂点とする完全グラフをハミング距離で辺着色したときの結果は情報科学的にも興味深い。

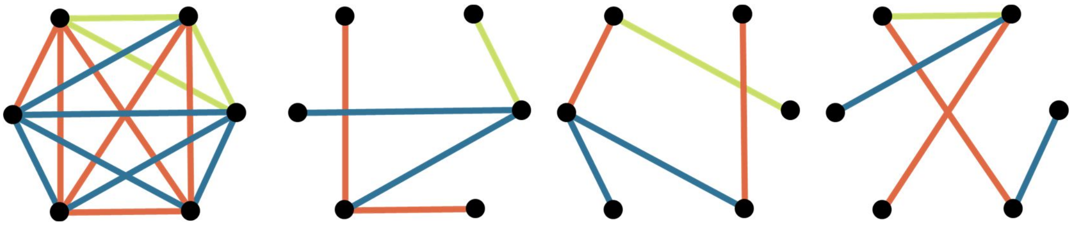

図 4　配色比率を保つ全域木分解

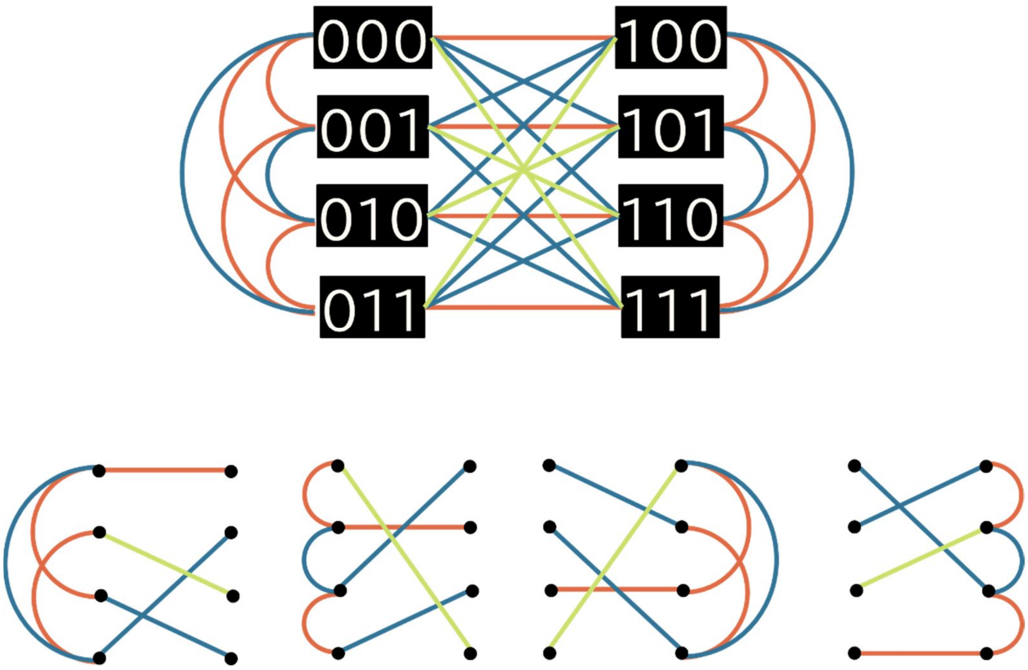

図 3　n-ビット列上の完全グラフをハミング距離で着色すると配色比率を保つ同型な全域木分解が存在する

＜参考文献＞
[1] Brualdi, R. A.; Hollingsworth, S.; Multicolored trees in complete graphs, J. Combin. Theory Ser. B 68 (1996), 310-313.

[2] Krussel, J.; Marshall, S.; Verrall, H.; Spanning trees orthogonal to one-factorizations of K2n, Ars Combin. 57 (2000), 77-82.

[3] Suzuki, K.; A necessary and sufficient condition for the existence of a heterochromatic spanning tree in a graph, Graphs Combin. 22 (2006), 261-269.

[4] Suzuki, K.; (g,f)-Chromatic spanning trees and forests. Australas. J. Combin. 74 (2019), 196-209.

[5] 鈴木一弘; 辺着色完全グラフは配色比率を保存したまま全域木分解できるか？. 離散数学とその応用研究集会 2020.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Suzuki, Kazuhiro	４．巻 74
２．論文標題 (g,f)-Chromatic spanning trees and forests	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Australas. J. Combin.	６．最初と最後の頁 196-209
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 鈴木一弘
２．発表標題 辺着色完全グラフは配色比率を保存したまま全域木分解できるか？
３．学会等名 離散数学とその応用研究集会2020
４．発表年 2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関