

令和 2 年 7 月 13 日現在

機関番号：33933

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05259

研究課題名(和文) グラフ理論におけるリーマン予想の深化とその応用

研究課題名(英文) Exploring the graph Riemann Hypothesis and its applications

研究代表者

齋藤 正顕 (SAITO, SEIKEN)

名古屋文理大学・健康生活学部・准教授

研究者番号：90525164

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：(1) Mertens 定理のグラフ理論的類似について誤差項を精密化した。(2) K.S. Williams による Mertens 定理の一般化のグラフ理論的類似を、正則被覆グラフで、被覆群が非アーベル群の場合に証明した。(3) A. Terras が予想した「非正則グラフについて、Ihara ゼータ関数の収束半径、平均次数、隣接行列のスペクトル半径の間の不等式」を証明した。(4) p -進数体上の2次元射影線型群のヘッケ環を量子確率論的に解釈し、ヘッケ環の元を代数的確率変数とする相互作用フォック空間を構成した。(5) 分割数の対数の漸近公式(Hardy-Ramanujan の公式)の一般化を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ラマヌジャングラフは、辺が少ないが、どの頂点ともよく繋がっているような効率の良いネットワークの例である。しかし、それは正則グラフにのみ定義されている。非正則ラマヌジャングラフの定式化としていろいろなラマヌジャン不等式の候補が提唱されている。本研究の成果として A. Terras の予想した不等式を示すことができたので、それらの非正則ラマヌジャン不等式の候補のいくつかについて強弱を示すことができた。また、正則ラマヌジャングラフのグラフゼータ関数(伊原ゼータ関数)を用いた定式化すなわちグラフリーマン予想の一般化や精密化のためにグラフ Mertens 定理を被覆グラフに関して一般化することができた。

研究成果の概要(英文)：(1) We gave a refinement of the error term for the graph-theoretic Mertens theorem. (2) A graph-theoretic analogy of the generalization of the Mertens theorem by K.S. Williams has been proved for regular covering graphs, where the covering groups are non-Abelian groups. (3) We proved inequalities among the radius of convergence of the Ihara zeta function, the average degree of vertices, and the spectral radius of the adjacency matrix, for an irregular graph. The inequalities were conjectured by A. Terras. (4) We have interpreted the Hecke algebra of the two-dimensional projective linear group on the p -adic number field by quantum probability theory. As a result, we constructed an interacting Fock space related to Hecke algebras. (5) We have given a generalization of the logarithmic asymptotic formula for the number of partitions (a generalization of Hardy-Ramanujan's formula).

研究分野：グラフ理論

キーワード：伊原ゼータ関数 素サイクル ラマヌジャングラフ リーマン予想 Ihara zeta function 被覆グラフ 被覆群 ヘッケ環

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

グラフの被覆において、その対称性の様子を表すのが被覆群である。被覆群は基本群の商と同型になる。この基本群の primitive な共役類と一対一に対応するのが、グラフの素測地線である素サイクルである。1966 年に伊原康隆氏によってグラフのゼータ関数(Ihara ゼータ関数)が定義されたことを契機に、素サイクルと素数の類似性の観点から、次の先行結果が得られている:

(A) 素サイクルの分布に関する定理(グラフの素数定理, Chebotarev の密度定理)[8,5,9]

(B) グラフにおけるリーマン予想(RH) の類似(グラフ X のゼータ関数が RH を満たすことと, X が Ramanujan グラフであることは同値)[7]

(A) に関して我々は先行研究により次の結果を得た:

(1) 素サイクルの長さに関する合同条件について, グラフの素数定理を一般化した[3].

(2) Mertens の定理のグラフ理論的類似を証明した[2].

(3) Williams の定理のグラフ理論的類似を証明した。つまり, 被覆群がアーベル群であるような正則被覆グラフに関して Williams の定理の類似を得た[4].

さて, Williams の定理は, 単に Mertens 定理の拡張というだけでなく, 一般リーマン予想 (Generalized Riemann Hypothesis(GRH))[1] や 深リーマン予想 (Deep Riemann Hypothesis(DRH)) [6]と関連する。正則グラフのゼータ関数に関する RH の類似が, ラマヌジャングラフという良いグラフのクラスを特徴づけることから, RH の一般化や精密化である GRH あるいは DRH のグラフ理論的類似の定式化を検討することが重要であると考えられる。

2. 研究の目的

グラフの素サイクルは, 基本群の情報を含むという点で重要な対象である。先行研究では素サイクルと数論の素数の類似に着目して, 素数定理やリーマン予想のグラフ理論的類似が得られてきた。特にリーマン予想の類似は Ramanujan グラフを特徴付けるので重要である。近年, 数論においてリーマン予想を精密化した一般リーマン予想あるいは深リーマン予想の研究が発展しつつある。我々は, 先行研究においてグラフ理論的 Mertens 定理を正則被覆グラフ (被覆群がアーベル群の場合) に対して拡張した。本研究では, 被覆グラフの Mertens 定理を被覆群が非アーベル群の場合に拡張し, これと関連するグラフの一般リーマン予想や深リーマン予想の定式化とそれを満たすグラフを調べる。

3. 研究の方法

アーベル被覆群を持つような被覆グラフについて我々の先行研究[4]の被覆グラフの Mertens 定理を用いて[6]の深リーマン予想のグラフ版を定式化した。非正則グラフの Ramanujan 不等式を定式化するために, Ihara ゼータ関数の収束半径に関する予想(A. Terras による)について調べた。また, Terras の予想とグラフのリーマン予想, A. Lubotzky や S. Hoory による非正則 Ramanujan 不等式の候補との関係を調べた。一般には正則とは限らない疎なランダムグラフの無限列 (増大列) の性質を調べる手法を応用して非正則 Ramanujan 不等式の定式化ができないかを探った。Ihara ゼータ関数の拡張を考えることで, 非正則 Ramanujan 不等式を定式化できないかを探った。グラフの Mertens 定理をグラフの無限被覆に拡張できないか検討した。グラフ理論, 整数論, 量子確率論, 量子ウォークなどの研究者による分野横断的な情報交換・意見交換のため下記 2 回の研究集会を開催した。(1)「量子論にまつわる数学と数論の連携探索」(早稲田大学 共創館 2017 年 3 月 8 日-9 日)(2)「量子論にまつわる数学と数論の研究集会 2018」(早稲田大学 共創館 2018 年 3 月 2 日-3 日)

4. 研究成果

(1) Mertens 定理のグラフ理論的類似について誤差項を精密化することができた。結果は次の論文として出版された。

T. Hasegawa and S. Saito, On graph theory Mertens' theorems, *Graphs Combin.*, 32 (2016), no. 5, 1915-1930.

(2) 1974年に K.S. Williams が素数の合同条件について拡張した Mertens の第3定理のグラフ理論的類似を, 正則被覆グラフで, 被覆群が非アーベル群の場合に証明した. 主要項の係数には Artin-Ihara の L-関数や, グラフの位相的エントロピーが現れることが分かった. さらに, Williams の定理に現れる主要項の係数についての極限公式(A. Languasco と A. Zaccagnini による 2007年の結果)についても, そのグラフ理論的類似を得た. 結果は論文として出版された.

T. Hasegawa, S. Saito and I. Sato, A generalization of a graph theory Mertens' theorem: Galois covering case, *Forum Math.*, 30 (2018), Issue 3, 599-615.

(3) A. Terras が 2011年の著書で予想した「正則とは限らないグラフについて, Ihara ゼータ関数の収束半径と, 平均次数と, 隣接行列のスペクトル半径に関する不等式」を証明した. 収束半径はグラフの隣接行列と次数行列に関するレイリー商を係数とする2次方程式の根のどちらかになるが, 負のルートと一致するという予想が問題として残った. この予想については, 正則グラフを含むグラフについては示したが, 一般の場合は未解決である. 結果は論文として出版された.

S. Saito, A proof of Terras' conjecture on the radius of convergence of the Ihara zeta function, *Discrete Math.*, 341 (2018), no.4, 990-996.

(4) p -進数体上の2次元射影線型群のヘッケ環を量子確率論的に解釈し, ヘッケ環の元を代数的確率変数とする相互作用フォック空間を構成した. この結果は正則木の固有値分布(Kesten-McKay law)と関連がある. 結果は論文として出版された.

T. Hasegawa, H. Saigo, S. Saito and S. Sugiyama, A quantum probabilistic approach to Hecke algebras for p -adic PGL_2 , *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 21 (2018), no. 3, 1850015, 10 pp.

(5) 分割数の対数の漸近公式(Hardy-Ramanujan formula)の一般化を与えた. より詳しく, 乗法的関数の値が1で, 加法的関数の法 m による合同条件に関する分割の個数の対数の漸近公式を与えた. この論文で得られた Nazaikinskii の結果の拡張は, グラフの素閉路による形式的な積の個数の対数に関する漸近式への応用が期待される. 結果は論文として出版された.

S. Saito, An asymptotic formula for the logarithm of generalized partition functions, *Ramanujan J.*, 49 (2019), no. 1, 39-53.

参考文献

- [1] K. Conrad, Partial Euler products on the critical line, *Canad. J. Math.* 57 (2005), no. 2, 267-297.
- [2] T. Hasegawa and S. Saito, On a prime zeta function of a graph, *Pacific J. Math.* 273 (2015), no. 1, 123-146.
- [3] T. Hasegawa and S. Saito, A generalization of the graph theory prime-number theorem of a finite graph, *Internat. J. Math.* 26 (2015), no. 9, 1550071, 19 pp.
- [4] T. Hasegawa, S. Saito and I. Sato, A generalization of a graph theory Mertens' theorem: abelian covering case, *Q. J. Math.* 66 (2015), no. 3, 809-836.
- [5] K. Hashimoto, Artin type L-functions and the density theorem for prime cycles on finite graphs, *Internat. J. Math.* 3(6) (1992) 809-826.
- [6] T. Kimura, S. Koyama and N. Kurokawa, Euler products beyond the boundary, *Lett. Math. Phys.* 104 (2014), no. 1, 1-19.
- [7] A. Lubotzky, R. Phillips, P. Sarnak, Ramanujan graphs, *Combinatorica* 8 (1988), no. 3, 261-277.
- [8] T. Sunada, L-functions in geometry and some applications, *Curvature and topology of Riemannian manifolds (Katata, 1985)*, 266--284, *Lecture Notes in Math.*, 1201, Springer, Berlin, 1986.
- [9] A. A. Terras, *Zeta functions of graphs, A stroll through the garden.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 128. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [10] K. S. Williams, Mertens' theorem for arithmetic progressions, *J. Number Theory* 6 (1974), 353-359.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Saito Seiken	4. 巻 49
2. 論文標題 An asymptotic formula for the logarithm of generalized partition functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 The Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 39-53
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s11139-018-0088-6	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hasegawa Takehiro, Saigo Hayato, Saito Seiken, Sugiyama Shingo	4. 巻 21
2. 論文標題 A quantum probabilistic approach to Hecke algebras for p-adic PGL2	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics	6. 最初と最後の頁 1850015-1850015
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1142/S0219025718500157	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Seiken Saito	4. 巻 Volume 341, Issue 4
2. 論文標題 A proof of Terras' conjecture on the radius of convergence of the Ihara zeta function	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 990-996
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2018.01.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takehiro Hasegawa, Seiken Saito and Iwao Sato	4. 巻 Volume 30, Issue 3
2. 論文標題 A generalization of a graph theory Mertens' theorem: Galois covering case	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Forum Mathematicum	6. 最初と最後の頁 599-615
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/forum-2016-0060	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Hasegawa and S. Saito	4. 巻 32
2. 論文標題 On graph theory Mertens' theorems	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1915-1930
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-016-1710-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計21件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 齋藤正顕
2. 発表標題 グラフのセルバーグ跡公式について
3. 学会等名 第93回米沢数学セミナー 『可換Banach 環と関連分野研究集会』
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 齋藤正顕
2. 発表標題 Ramanujan グラフの non-backtracking paths の個数の分布に関する数値実験
3. 学会等名 第4回 軽井沢グラフと解析研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 齋藤正顕
2. 発表標題 グラフのゼータ関数と跡公式について
3. 学会等名 名古屋大学 解析数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 齋藤正顕
2. 発表標題 正則グラフの固有ベクトルに関する Berry 予想
3. 学会等名 名古屋組合せ論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 齋藤正顕
2. 発表標題 グラフの量子カオスと固有ベクトルに関する数値実験
3. 学会等名 2018 軽井沢グラフと解析研究集会II
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 齋藤正顕
2. 発表標題 グラフ上の量子エルゴード性とグラフの固有ベクトルについて
3. 学会等名 愛知数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 齋藤正顕
2. 発表標題 Ihara zeta 関数の収束半径に関する不等式
3. 学会等名 日本数学会 2018 年度 秋季総合分科会（応用数学分科会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 齋藤正顕
2. 発表標題 大きい正則グラフの固有ベクトルについて
3. 学会等名 第92回米沢数学セミナー「可換Banach環と関連分野研究集会」
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Seiken Saito
2. 発表標題 On the radius of convergence of the Ihara zeta function
3. 学会等名 Workshop on Graph Spectra, Combinatorics and Optimization 2018 (WGSCO2018) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 齋藤 正顕
2. 発表標題 ランダムグラフの固有値の半円則について
3. 学会等名 第29回位相幾何的グラフ理論研究集会 (TGT 29)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 齋藤 正顕
2. 発表標題 Ihara zeta 関数の収束半径に関する Terras の予想
3. 学会等名 九大代数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 齋藤 正顕
2. 発表標題 Ihara zeta 関数の収束半径に関する予想について
3. 学会等名 新潟代数セミナー（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 齋藤 正顕
2. 発表標題 テラスの予想について
3. 学会等名 第2回グラフゼータと量子ウォークの諸相
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 齋藤 正顕
2. 発表標題 Ihara zeta 関数の収束半径に関する2つの予想について
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会2017
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 齋藤 正顕
2. 発表標題 分割の対数に関する漸近公式の拡張
3. 学会等名 第91回米沢数学セミナー「可換Banach 環と関連分野研究集会」
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 齋藤正顕
2. 発表標題 数論における半円則と逆正弦則
3. 学会等名 量子論にまつわる数学と数論の連携探索
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 齋藤正顕
2. 発表標題 Mertens theorem for Galois coverings of graphs
3. 学会等名 第 10 回ゼータ若手研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 齋藤正顕
2. 発表標題 グラフのゼータ函数の収束半径
3. 学会等名 2017年軽井沢グラフと解析研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Seiken Saito
2. 発表標題 Mertens' theorems for Galois extensions of number fields
3. 学会等名 The Sixth International Conference Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 齋藤正顕
2. 発表標題 グラフの深リーマン予想
3. 学会等名 グラフゼータと量子ウォークの諸相
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 齋藤正顕
2. 発表標題 Cohen のマース形式の拡張について
3. 学会等名 第90回米沢数学セミナー「可換Banach環と関連分野研究集会」
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>研究会ホームページ</p> <p>(1)「量子論にまつわる数学と数論の連携探索」(早稲田大学 共創館 2017年3月8日-9日) https://sites.google.com/view/2017qa/</p> <p>(2)「量子論にまつわる数学と数論の研究集会2018」(早稲田大学 共創館 2018年3月2日-3日) https://sites.google.com/view/qa2018/</p>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	長谷川 武博 (Hasegawa Takehiro) (80409614)	滋賀大学・教育学部・准教授 (14201)	