様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　５ 月 ３１ 日現在

機関番号：１２６１２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５２６７

研究課題名（和文）佐藤超函数論に基づく数値解析

研究課題名（英文）Numerical analysis based on hyperfunction theory

研究代表者
緒方　秀教（Ogata, Hidenori）

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授

研究者番号：５０２４２０３７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：佐藤超函数論は複素関数論に基づく一般化関数の理論である．佐藤超函数論は数値的扱いの難しい特異関数を数値的に扱いやすい解析関数で表すので，数値計算での有用性が期待される．
具体的には，数値積分，積分方程式，Fourier変換に対し佐藤超函数論を応用した数値計算法を提案した．数値積分では複素周回積分を介した方法を提案した．この方法は指数関数的収束し特にベキ的特異性をもつ積分に有効である．積分方程式の数値解法は，この数値積分法を応用したものである．Fourier変換では，Fourier-Laplace変換で表される複素解析関数を解析接続する方法を提案した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
佐藤超函数論は当初、純粋数学における理論であった．同理論を応用数学分野に応用するという研究はあまりなされておらず，その意味で、佐藤超函数論を数値解析分野に応用するという本研究は画期的なものである．そして，佐藤超函数論が純粋数学における一分野にとどまるだけでなく，実用面においても十分役に立つものであることが示された．そして，数値解析の分野においても，佐藤超函数論という数学の一分野から新たな数値計算の道具がもたらされたと言える．
数学においては，当初は純粋な数学的興味から考え出された概念が，後に実学においても有用であることが示された例がいくつもある．本研究もその一つと言えよう．

研究成果の概要（英文）：Hyperfunction theory is a theory of generalized functions which is based on complex function theory. Hyperfunction theory expresses singular functions, which is difficult to treat with in numerical computations, by analytic functions, and, therefore, it is expected to be applicable to numerical computations.
In this study, we dealt with numerical integration, integral equation and Fourier transform. We proposed a numerical integration method which gives desired integrals via complex integrations. We found that it converges exponentially and is efficient especially for integrals with power singularities. Numerical solution for integral equations is an application of this numerical integration method. Besides, we proposed a numerical method for Fourier transform by the analytic continuation of a complex analytic function given by Fourier-Laplace transform.

研究分野：数値解析

キーワード：佐藤超函数　複素関数論　解析関数　数値積分　積分方程式　Fourier変換

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

本研究の着想の発端は平山が提案した数値積分法である．平山の方法では，計算しようとする積分において被積分関数が実解析関数である場合，関数論における Cauchy の積分公式によりもとの積分を複素積分に変換し，それを台形則で近似計算する．緒方がこの数値積分法を理論的に解析し数値実験してみたところ，とくに端点特異性の非常に強い積分に対し有効であることがわかった．

そして，ここで現れる実積分の複素積分への変換は，実は佐藤超函数論における積分の定義に一致する．佐藤超函数論とは佐藤幹夫が考案した一般化関数論の理論である．大雑把に言えば，超函数(hyperfunction)とは次のように解析関数の境界値の差で表される一般化関数 f(x)である．

$$f(x) = F(x + i0) - F(x - i0)$$

（F(z)は複素平面から実軸を除いた部分に含まれる領域における解析関数）．例えば，Dirac のデルタ関数 δ(x)，Heaviside の階段関数 Y(x)は佐藤超函数として次のように表される．

$$\delta(x) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right),\ Y(x) = \begin{cases} 1\ (x > 0) \\ 0\ (x < 0) \end{cases} = -\frac{1}{2\pi i}\{\log(-(x+i0)) - \log(-(x-i0))\},$$

（複素対数関数 log z は主値，すなわち，-π < Im log z=arg z≦πなる分枝とする）．そして，平山の数値積分法は，求めようとする積分を超函数積分とみなして，それを定義する複素積分を近似計算する方法なのである．そして，上述の通り，この数値積分法は端点特異性の強い積分に有効である．この有限区間数値積分に対する佐藤超函数論の応用を他の数値計算に拡張しようというのが，本研究の目的である．

２．研究の目的

本研究では，科学技術の諸計算について佐藤超函数論に基づく数値計算法（以下「超函数法」と記す）を作成し，従来の方法に対する有効性を計算する．具体的には，無限区間積分，特異積分（Cauchy の主値，Hadamard 有限部分積分）に対する数値積分，積分変換（Fourier 変換など），積分方程式に対し超関数法を考案する．

３．研究の方法

本研究では，定積分，特異積分，積分変換（Fourier 変換など），積分方程式といった科学技術計算に対し，超函数法の数値計算公式を作成する．そして，従来の方法と比較しつつ超函数法の性能を，とくに特異性をもつ問題に対する有効性に注意して，理論誤差解析，コンピュータによる数値実験の両面から検証する．また，超函数計算に伴う問題，たとえば，複素数計算の手間の軽減，複素積分の積分路の選び方，超函数の数値的表現・可視化についても考察し，計算手法を考案する．

４．研究成果

(1) 第１年度（平成 28 年度）は，佐藤超函数論に基づく数値積分法の構築を課題とした．実解析関数 f(x)の積分 $\int_a^b f(x)w(x)dx$ （w(x)は重み関数）の数値計算を考える．この積分は

佐藤超函数論を用いれば次のように複素周回積分を用いて表すことができる．

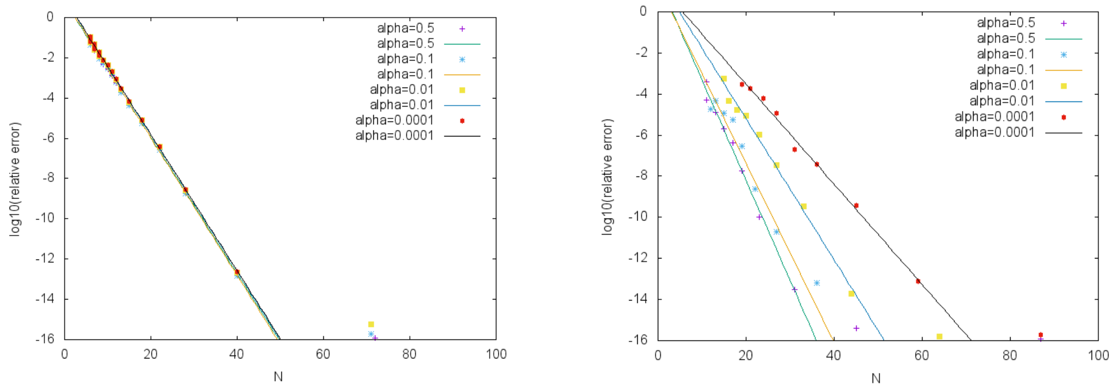
$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\Phi(z)dz, \qquad \text{ここで} \qquad \Phi(z) = \int_a^b \frac{w(x)}{z-x}dx$$

（C は積分区間(a,b)を正の向きに囲む閉複素積分路）．この複素積分を数値的に計算することにより求める積分の近似値を求めるのが，本研究で提案する方法である．これまでの研究で有限区間積分に対する計算法はすでに確立されていたが，当年度はこれを拡張し，半無限区間積分および Hadamard の有限部分積分に対する数値積分法を構築した．

半無限区間(正の実軸)積分に対する数値積分法は基本的には有限区間積分の場合と同様で，佐藤超函数論により求める積分を正の実軸の周りを周回する積分路上の複素積分に変換し，それを台形則で近似計算する．ただし，無限区間積分の場合，それを変換した複素積分も無限積分となるので，DE 公式の手法を併用した．この数値積分法は，理論解析により分点数に対し指数関数的に収束し，数値実験により端点特異性をもつ積分に対して有効であることが示された．図１に半無限区間積分

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx\ (= \Gamma(\alpha),\ \alpha > 0)$$

を超函数法および DE 公式で計算したときの誤差の標本点数 N に対する変化の様子を示す. 図より，超函数法は端点 x=0 におけるべき的特異性が強くなっても数値積分の精度がほとんど変わらず高精度な積分値を与えていることがわかる.



超函数法　　　　　　　　　　　　　　　　DE 公式

図１：超函数法および DE 公式の数値積分誤差.
縦軸は相対誤差の常用対数，横軸は標本点数 N.

Hadamard の有限部分積分は, 例えば $\int_{-1}^{0}\frac{f(x)}{x}dx$ (f(x)は f(0)≠0 なる関数)という積分について，この積分自体は発散するが，$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{f(x)}{x}dx\ (\varepsilon>0)$ という積分を考え極限 $\varepsilon\to 0+$ をとったときに発散する項を取り除いた有限値のことである. これは元来極限操作を用いて定義されるので数値計算が面倒であるが，佐藤超函数論を用いると通常の積分と同様の扱いが可能となるので，本研究の数値積分法が簡単に応用できる．そして，実際に数値積分法を構成し，数値実験によりその有効性を確かめた.
（関連する発表論文等：②，③，④，⑤，⑪，⑭，⑮，⑯，⑰，⑱）

(2) 第 2 年度（平成 29 年度）は，第 2 種 Fredholm 積分方程式

$$u(x)+\int_{a}^{b}K(x,y)u(y)w(y)dy=f(x)$$

（K(x,y), f(x)は既知の関数，w(x)は既知の重み関数）に対する超函数を構築した．これは，これまでに研究した数値積分に対する超函数法の応用である．ここでは，佐藤超函数の積分は複素積分で定義されることに着目し，積分方程式の積分作用素を複素積分で表現した上で数値積分に対する超関数法を適用して離散化し，連立一次方程式に帰着させて数値解を得る．数値実験により高精度で近似解を得，真の解に指数関数的に収束することがわかった．図２に，積分方程式

$$u(x)+\int_{0}^{1}(x-\xi)u(\xi)\xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta-1}d\xi=g(x)\ (\alpha=\beta=10^{-4})$$

に対し，超函数法および数値積分則として DE 公式，Gauss-Jacobi 公式を用いた方法で数値会を求めたときの誤差を示す．この方程式の積分作用素は極めて強い端点特異性をもつが，超函数法は高精度で数値解を与えることがわかる.
一方，この解法に現れる連立一次方程式は極めて悪条件であり，十分精度の良い解を得るためには多倍長計算に頼らざるを得ないことがわかった．この難点の克服が今後の課題として残った.

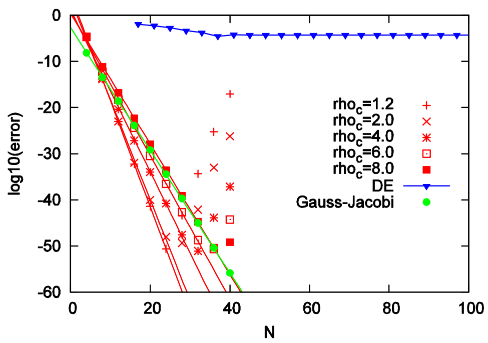


図２：第２種 Fredholm 型積分方程式に対する数値解法の誤差．縦軸は誤差の常用対数，横軸は

数値計算公式の分点数 N である．rho$_c$は超函数法で用いるパラメータの値である．

(関連する発表論文等：⑫，⑬)

(3) 第 3 年度（平成 30 年度）は，Fourier 変換

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-2\pi i\xi x)\,dx$$

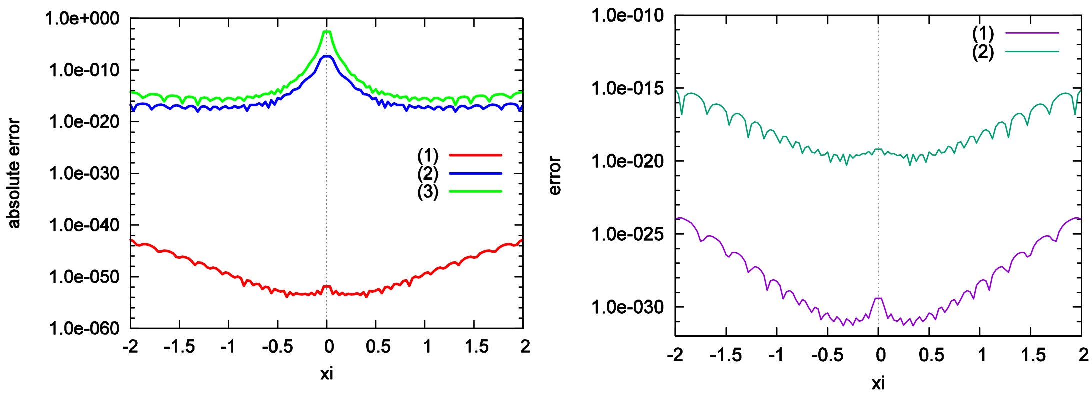
に対する超関数法を構築した．Fourier 変換は科学技術計算で重要であるが，f(x)が減衰の遅い関数の場合積分計算が困難であるという問題がある．これに対し本研究では，佐藤超函数論における Fourier 変換の定義に従い，Fourier-Laplace 変換により表されるある解析関数を計算し，その実軸上への解析接続により Fourier 変換を計算する方法を提案した．この解析関数の計算には数値積分を要するが，この積分は被積分関数が指数関数的に減衰するので，従来の数値積分公式（DE 公式）で簡単に計算できる．数値実験によりこの方法の有効性が示された．また，この研究に関連して，解析関数に対する連分数を用いた解析接続の数値計算法が考案され，その有効性が確かめられた．図３(a)は，

$$f(x) = (1)\tanh(\pi x), (2)\,(1+x^2)^{-2}, (3)\log|x|, (4)\coth(\pi x), (5)\operatorname{cosech} x$$

に対し，図３(b)は

$$f(x) = (1)\ \coth(\pi x),\ (2)\operatorname{cosech} x$$

に対し超函数法で Fourier 変換 $\mathcal{F}[f](\xi)$を計算したときの誤差を示す．



(a)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(b)

図３：Fourier 変換 $\mathcal{F}[f](\xi)$に対する超函数法の誤差．
縦軸は絶対誤差の常用対数，縦軸は座標ξを示す．

（関連する発表論文等：①，⑥，⑦，⑧，⑨，⑩）

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 5 件）

① Hidenori Ogata, A numerical method of Fourier transform based on hyperfunction theory, 査読無, ArXiv:1808.03460, 2018.

② Hidenori Ogata and Hiroshi Hirayama, Numerical integration method based on hyperfunction theory, 査読有, Journal of Computational and Applied Mathematics, 327 (2018) 243-259.

③ 緒方秀教, 佐藤超函数論に基づく数値解析, 応用数理, 査読有, 第 27 巻, 2018 年, 8-15.

④ 緒方秀教, 佐藤超函数論に基づく数値積分, 京都大学数理解析研究所講究録 2037, 査読無, 2017 年, 57-60.

⑤ 緒方秀教・平山弘, 数値積分に対する超函数法, 日本応用数理学会論文誌, 査読有, 第 26 巻, 2016 年, 33-43.

〔学会発表〕（計 14 件）

⑥ Hidenori Ogata, A numerical analytic continuation and its application to Fourier transform, ApplMath18 (Ninth Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing), Sibenik, Croatia, 18 September 2018.

⑦ 緒方秀教, 連分数を用いた数値解析接続と Fourier 変換への応用, 日本応用数理学会 2018 年度年会, 名古屋大学東山キャンパス, 2018 年 9 月 5 日.

⑧ 緒方秀教, 佐藤超函数論と数値解析への応用, 常微分方程式の数値解法とその周辺 2018, 大阪大学豊中キャンパス・サイバーメディアセンター, 2018 年 7 月 9 日.

⑨ Hidenori Ogata, Numerical Fourier transform based on hyperfunction theory, ECMI2018

(The 20th European Conference on Mathematics and Industy), Danubius Hotel Helia, Budapest, Hungary, 21 June 2018.

⑩ 緒方秀教, 佐藤超函数論に基づくフーリエ変換の数値計算法, 日本応用数理学会 2018 年研究部会連合発表会, 大阪大学吹田キャンパス, 2018 年 3 月 15 日.

⑪ 緒方秀教, 非整数次べき的特異性をもつ Hadamard 有限部分積分に対する超函数法, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学瀬田キャンパス, 2017 年 12 月 16 日.

⑫ 緒方秀教, 第 2 種 Fredholm 積分方程式に対する超函数法, 日本応用数理学会, 武蔵野大学有明キャンパス, 2017 年 9 月 8 日.

⑬ Hidenori Ogata, Hyperfunction method for numerical integration and Fredholm integral equations of the second kind, Computational Methods and Function Theory, Maria Curie Skłodowska University, Lublin, Poland, 13 July 2017.

⑭ 緒方秀教, Hadamard 有限部分積分に対する超函数法, 日本応用数理学会年会, 北九州国際会議場, 北九州, 2016 年 9 月 12 日.

⑮ Hidenori Ogata, Numerical integration method on the hyperfunction theory, The 6th China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics, NIMS, Daejeon, 23 August 2016 (invited speech).

⑯ Hidenori Ogata and Hirayama Hiroshi, An application of the hyperfunction theory to numerical integration, ECMI 2016 (The 19th European Conference on Mathematics for Industry, Santiago de Compostela, Spain, 17 June 2016.

⑰ 緒方秀教・平山弘, 佐藤超函数論に基づく数値積分法, 日本数学会 2016 年度年会, 筑波大学, つくば, 2016 年 3 月 19 日.

⑱ Hidenori Ogata and Hiroshi Hirayama, Numerical integration based on the hyperfunction theory, Second International ACCA-JP/UK Workshop, Kyoto, 19 January 2016 (invited speech).

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等