

令和元年6月17日現在

機関番号：15201

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05274

研究課題名（和文）集合値計画法における 双対理論の研究

研究課題名（英文）Study on duality theory in set-valued programming

研究代表者

黒岩 大史（Kuroiwa, Daishi）

島根大学・学術研究院理工学系・教授

研究者番号：40284020

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：集合値最適化問題とは、複数のグループ（集合）から最適なものを見つける問題である。本研究では、集合値最適化問題の解、すなわち、優れたグループを見つけるための理論と手法に関する研究を行った。特に元の問題と対をなす双対問題や、線形のスカラー化についての結果を得た。この結果は、通常の数理最適化問題、多目的最適化問題に対する理論を含むだけでなく、ゲーム理論、数理経済学などを始めとする種々の最適化理論の関連分野への新しいアプローチを持つものとして国際的に注目されている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の学術的な特色は、双対問題を具体的に記述できることである。このことで、これまでに容易に表現出来なかった問題が扱いやすくなる。集合値最適化問題が関連する学問範囲は広く、集合値解析、非線形解析、ベクトル値解析、凸解析、最適化理論、ゲーム理論、ファイナンス等の関連分野への影響力を持つため、国内外を問わず多くの研究者から注目されている研究分野である。従って本研究の発展は関連分野に対しても大きな影響を与え、相乗的に研究が進化・発展すると予想される。

研究成果の概要（英文）：Set-valued optimization problem is a problem to find a set from a family of sets. In this study, we researched theory and methods to find a solution. In particular, we obtained duality results and linear scalarization for this problem. These results are not only generalizations of the ordinary mathematical optimization problems and multi-objective optimization problems, but also as a new approach to related fields of various optimization theories such as game theory and mathematical economics.

研究分野：集合値最適化

キーワード：集合値最適化 線形スカラー化 凸関数 拡張凸関数 双対理論 制約想定

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

「数理計画問題」とは、与えられた制約条件の下でより良い目的を達成するための数理モデルであり、理学、経済学、工学の分野にとどまらず、経営、政策なども含む非常に有用性の高い問題である。この問題を、目的が複数であっても対応できるようにモデル化したのが「多目的計画問題」であり、これまでに四半世紀程の研究が行われている。例えば何か欲しいものを購入する場合、出来るだけ良い品を買いたい(目的1)、出来るだけ安く買いきたい(目的2)という二つの目的を同時に達成させたいと考えるのは自然なことであり、この問題は非常に広い適用範囲を持っていることが判る。しかしながらチームやクラス、部署や会社等のグループ同士の比較の際には、それぞれの構成員が複数の要素から評価されているとしても、多目的計画問題の枠組みには収まらない。優秀なグループを選ぶには、個人の能力のみで比較するのではなく、構成員全体の能力によって判断されるべきである。このような考えに基づいて、研究代表者によって1996年に導入されたのが『集合値計画問題』である。このモデルにおいてはグループ間の比較が可能となり、かつ実社会における多様な価値観を集合値写像によって自然に表現することが可能となるため、複雑かつ多彩な社会現象を紐解くことが可能となる。『集合値計画問題』の研究は、ゲーム理論、数理経済学などを始めとする種々の最適化理論の関連分野への新しいアプローチを持つものとして国際的に評価・注目されており、予想を越えたかなり早い速度で拡散・発展してきている。多目的最適化の世界的権威である J. Jahn 氏に注目され、彼の書籍「J. Jahn, Vector optimization. Theory, applications, and extensions. Springer-Verlag, Berlin, 2004.」にも取り上げられているだけでなく、ドイツの C. Tammer 氏、A. Lohne 氏、オーストリアの I. R. Bot 氏、アメリカの A. A. Khan 氏、ベトナムの T. X. D. Ha 氏、スペインの E. Hernandez 氏、M. Sama 氏、V. Novo 氏、イタリアの A. Hamel 氏、M. Rocca 氏、G. Crespi 氏、オーストラリアの V. Jeyakumar 氏、ポーランドの N. Popovici 氏、韓国の G. M. Lee 氏など、多くの研究者に注目され、盛んに研究が進められている。2012年8月には、集合値計画法を主題として扱い、ファイナンスとの連携について考察する国際会議「Set optimization meets finance」が A. Hamel 氏等によって開催され、さらに2014年9月には第2回の同国際会議が開催されるなど、最近の集合値計画法の研究の発展には目覚ましいものがある。

さて、集合値計画問題を考察する際には、既に研究代表者によって導入されている「埋め込み手法」が重要な役割をなす。この手法を用いることで最適解や集合値関数にまつわる様々な概念を容易に扱えるため、この手法の有用性は M. Rocca 氏、G. Crespi 氏、N. Popovici 氏など多くの研究者から高く評価されている。実際、双対理論の研究においてもこの手法は有用であり、理論面では結果が得られていた。しかしながら、この埋め込み手法で用いられている線形順序空間の双対空間を明確に表現することが困難であるため、集合値計画問題の双対問題は判りやすい形では表現されていなかった。すなわち、理論的には双対問題を定義できるものの、その具体的な形が判らないため、応用面での意義に乏しいものとなっていたため、集合値計画問題に対する双対理論の構築は強く望まれていた。

### 2. 研究の目的

このような状況を鑑みながら、集合値計画問題に対する双対理論の構築、すなわち、双対問題を具体的に表現するための土壌作りと、実際問題への応用を行う。具体的には次の通りである。

集合値計画問題に対する双対理論を構築するための線形順序空間とその双対空間に関する理論を、現実の問題に対応できるレベルで構築する。

上記の線形順序空間に埋め込まれるような集合値制約付き集合値最適化問題に対して、適切な Lagrange 双対問題を導入し、弱双対定理および強双対定理が成立することを示す。その際に必要となる集合値写像の凸性、準凸性、あるいは差凸性の概念を導入する。

集合値計画問題の解に対する最適性について考察し、関連する制約想定についても研究を行う。そして、特にベクトル値ロバスト最適化問題や集合値変分不等式問題などの具体的な問題への応用を考察する。

### 3. 研究の方法

集合値計画問題に対する双対理論を構築するための線形順序空間を導入する際、研究代表者によって導入されている統一的な埋め込み手法を用いる。また集合族上の二項関係(集合順序)として、I型、u型や、Jahn氏によって考察されているs型の集合順序を考察する。このようにして作られた線形順序空間の双対空間について研究を行う。

集合値計画問題に対する具体的かつ適切な Lagrange 双対問題を導入し、双対理論を構築する。強双対定理に関連して、既存の結果を見据えながら、Slater 制約想定、一次独立制約想定、Guignard 制約想定、あるいは Farkas Minkowski 性などの拡張にあたる新しい制約想定を導入し、これらと強双対の間にある関係を調べる。

上記において必要となる凸性、準凸性、差凸性などの凸概念や、半連続性、有界性、単調性、あるいは微分可能性などの集合値写像に関する概念を、埋め込み空間を用いて考察する。

関連する領域の種々の問題について応用を考察する。特に、集合値計画問題の解に対する最適性と制約想定、ベクトル値ロバスト最適化問題、および集合値変分不等式問題について研究する。また、応用の際に生じた問題点やアイデアは、必要があればフィードバックしながら埋め込み空間を再構築し、理論を拡張する。

#### 4. 研究成果

埋め込み空間の双対空間を記述し、凸集合計画問題の線形スカラー化による特徴付けを行った。制約が集合値写像で記述された最適化問題について、凸の場合の必要十分制約想定を導入と、DCの場合の制約想定を導入を行った。

不確実性を持つ多目的最適化問題に応用し、複数のロバスト解の定義を行い、良解と感度解析についての結果を得た。

集合値写像に対する拡張凸性の仮定の下での Fenchel 双対性についての結果を得た。

集合値準凸関数の l 型、u 型における拡張概念の体系的な観察を行った。

集合対集合写像の不動集合定理についての結果を得た。

拡張集合関係と集合最適化問題の解の数値的計算手法についての結果を得た。

凸最適化問題および DC 最適化問題の双対定理と関連する制約想定についての結果を得た。

#### 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 8 件)

- [1] Crespi, Giovanni P.; Kuroiwa, Daishi; Rocca, Matteo. Robust optimization: sensitivity to uncertainty in scalar and vector cases, with applications. Oper. Res. Perspect. 5 (2018), 113-119.
- [2] Suzuki, Satoshi; Kuroiwa, Daishi. Fenchel duality for convex set functions. Pure Appl. Funct. Anal. 3 (2018), no. 3, 505-516.
- [3] Seto, Kazuki; Kuroiwa, Daishi; Popovici, Nicolae. A systematization of convexity and quasiconvexity concepts for set-valued maps, defined by l-type and u-type preorder relations. Optimization 67 (2018), no. 7, 1077-1094.
- [4] Seto, Kazuki; Kuroiwa, Daishi. A fixed set theorem for set-to-set maps. Appl. Anal. Optim. 2 (2018), no. 1, 41-46.
- [5] Köbis, Elisabeth; Kuroiwa, Daishi; Tammer, Christiane. Generalized set order relations and their numerical treatment. Appl. Anal. Optim. 1 (2017), no. 1, 45-65.
- [6] Crespi, Giovanni P.; Kuroiwa, Daishi; Rocca, Matteo. Quasiconvexity of set-valued maps assures well-posedness of robust vector optimization. Ann. Oper. Res. 251 (2017), no. 1-2, 89-104.
- [7] Suzuki, Satoshi; Kuroiwa, Daishi. Duality theorems for separable convex programming without qualifications. J. Optim. Theory Appl. 172 (2017), no. 2, 669-683.
- [8] Harada, Ryohei; Kuroiwa, Daishi. Lagrange-type duality in DC programming problems with equivalent DC inequalities. J. Inequal. Appl. 2016, Paper No. 276, 15 pp.

〔学会発表〕(計 7 件)

- [1] Kuroiwa, Daishi. A linear scalarization and duality results for convex set Optimization, SOFA2019, February 14, 2019, Jena, Germany.
- [2] Kuroiwa, Daishi. Duality for convex set optimization, NAO-ASIA2018, November 7, 2018, Okinawa, Japan.
- [3] Kuroiwa, Daishi. A duality result for convex set optimization, ACFPT02018, July 17, 2018, Chiang Mai, Thailand.
- [4] Kuroiwa, Daishi. A duality theorem for convex set optimization, ICVAN02018, July 1, 2018, Halle, Germany.
- [5] Kuroiwa, Daishi. Set optimization and its duality idea, NACA2017, July 5, 2017, Chitose, Japan.
- [6] Matteo Rocca, Giovanni P. Crespi, Daishi Kuroiwa, Nicolae Popovici. Robust vector optimization: sensitivity to uncertainty and generalized convexity of set-valued maps, ICCOPT2016, August 8, 2016, Tokyo, Japan.
- [7] Kuroiwa, Daishi. Unified approach in set optimization with parameterized embedding functions, NAO-ASIA2016, August 2, 2016, Niigata, Japan.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。