

令和 2 年 6 月 15 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05275

研究課題名(和文)非線形偏微分方程式の特異極限問題およびポテンシャルと結合した界面運動の研究

研究課題名(英文) Singular limit problem for nonlinear PDE and interface motion coupled with potentials

研究代表者

大下 承民(Oshita, Yoshihito)

岡山大学・自然科学研究科・准教授

研究者番号：70421998

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、3成分活性因子・抑制因子型反応拡散系の特異極限問題に現れる界面方程式と2つの放物型方程式のシステムの球対称平衡解の線形安定性/不安定性の判定条件を与えた。

また、マイクロ相分離現象を記述する自由境界問題を、1成分の体積分率が小さく、マイクロ相分離が小さい円周の集まりになるパラメータ領域で考察した。平均半径の3乗と体積分率の逆数の対数の積のオーダーの時間スケールにおける平均場モデルを厳密導出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

変分原理、リャプノフ・シュミットの縮約法、線形化安定性解析、不変多様体への縮約理論、均質化の手法、漸近展開法などの手法を用いたり、新しい数学的手法の開発をすることで、反応拡散系の特異極限問題、界面方程式の解の構造、非線形楕円型偏微分方程式の特異極限問題に現れる様々な解の集中現象の数理解析、自然界に現れるパターン形成の数理的構造や非線形偏微分方程式の数理解析の新しい知見を得ることができる。

研究成果の概要(英文)：We show linear stability or instability for radially symmetric equilibrium solutions to the system of interface equation and two parabolic equations arising in the singular limit of three-component activator-inhibitor models.

Also, we study the free boundary problem describing the micro phase separation in the regime that one component has small volume fraction such that the micro phase separation results in an ensemble of small disks of one component. We rigorously derive the heterogeneous mean-field equations on a time scale of the order of $R \ln(1/\epsilon)$, where R is the mean radius of disks. On this time scale, the evolution is dominated by coarsening and stabilization of the radii of the disks, whereas migration of disks becomes only relevant on a larger time scale.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：非線形偏微分方程式

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

結晶粒ドメインの成長やゼブラフィッシュの皮膚の模様のように物質や生物などの自然界には様々なパターンが溢れている。活性因子・抑制因子型反応拡散系において、活性因子の拡散係数を 0 にする特異極限問題を考える。これはちょうど、生物の形態形成などで重要な役割を果たしていると考えられている拡散誘導不安定性が生じるパラメータ範囲に対応している。双安定な非線形項をもつ場合、「相分離」パターンが現れることが多く、極限では、遷移層の幅は 0 に近づき、一般に「界面」と呼ばれる領域内部の不連続面が生じる。

Heijster と Sandstede は、3 成分 FitzHugh--Nagumo 型反応拡散系の球対称定常スポットから分岐する進行スポットについて研究した。2 成分 FitzHugh--Nagumo 型反応拡散系では超臨界ドリフト分岐は起こらないことが示唆されている。さらに、球対称定常スポットの存在と安定性が研究されている。

- 2 相境界問題の球面界面の線形安定性が Chen--Taniguchi らにより研究されている。
- 2 成分/3 成分の FitzHugh--Nagumo 型を含む反応拡散系に現れる内部遷移層やシャープインターフェースについては近年盛んに研究されてきた。
- 3 成分反応拡散系の特異極限問題に関する球対称平衡解の存在と安定性についてのさらなる研究の発展が期待されていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、非線形偏微分方程式およびエネルギー汎関数に対する勾配流方程式の特異極限として現れる界面運動方程式の時間発展の構造、細胞の生命現象を記述する数理モデルや非局所項をもつ反応拡散系の特異極限問題およびその極限として現れる界面方程式の解の構造、非線形楕円型偏微分方程式の特異極限問題に現れる解の種々の集中現象を、勾配流に対する変分原理(レイリー原理)、リャプノフ・シュミットの縮約法、線形化安定性解析、分岐理論、不変多様体への縮約理論、均質化の手法、漸近展開法などの手法、さらにハイブリッドな、あるいは新しい数学的手法の開発を通して解明することである。

二元合金における相分離現象は自由エネルギー最小の原理という変分原理で記述され、その時間発展を記述するモデルは勾配流の構造をもっている。この二元合金のように二種類の物質の単なる混合系では、マクロスケールの相分離(領域の分離)がみられる。一方、その二つの物質が連結しているときには、ミクロ相分離と呼ばれるずっと小さなスケールでの周期パターンが形成されやすい。例えば、ジブロックコポリマーでは体積分率の違いにより、様々な形態のパターンが観測される。このようなエネルギー駆動型のミクロパターン形成の問題に対して、勾配流に対する変分原理(レイリー原理)、均質化の手法、測度論、不変多様体への縮約理論、リャプノフ・シュミットの縮約法、分岐理論、漸近展開法を駆使し、さらに、ハイブリッドなあるいは新しい数学的手法の開発を通して、材料・物質科学あるいは生命科学への応用を目指していく。

3. 研究の方法

カーン・ヒリアードモデルではドメインの平均サイズの増加という粗大化がずっと進行するのに対して、太田・川崎モデルでは、非局所項により粗大化が阻止されるといえる。これを厳密に導出するために、太田・川崎モデルに対して特異極限問題を考察し、それに変分原理を応用する。さらに、勾配流方程式に対しても、それに対する変分原理(レイリー原理)を用いる。このような勾配流に対する変分原理(レイリー原理)を用いる手法や、均質化の手法、球面の半径と中心位置からなる部分多様体への縮約法を用いて平均場モデルの厳密導出を研究する。

3 成分活性因子・抑制因子型反応拡散系の特異極限をとったときに現れる界面方程式と反応拡散方程式のシステムに対して、線形化解析により固有値問題を研究する。球対称平衡解の安定性の研究には、特異極限法および線形化解析を用いる。

4. 研究成果

3 成分反応拡散系の特異極限問題に関する研究

界面方程式と反応拡散方程式のシステムは、3成分活性因子・抑制因子型反応拡散系の特異極限をとったときに現れる。

活性因子・抑制因子型反応拡散系において、双安定な非線形項をもつ場合、「相分離」パターンが現れることが多い。あるパラメーターが小さいとき、2つの相領域が形成され、それらの間に薄い遷移層領域が現れる。この内部遷移層はパラメーターと同じオーダーの幅をもつ。

極限では、遷移層の幅は0に近づき、一般に「界面」と呼ばれる領域内部の不連続面が生じる。界面の時間発展は、抑制因子の濃度だけでなく、その平均曲率にも支配される。

本研究では、このような、3成分反応拡散系の特異極限問題に対して、球対称平衡解の線形安定性/不安定性の判定条件を与えた。

ミクロ相分離現象に関する研究

二元合金のような二種類の物質の単なる混合系では、マクロスケールの相分離(領域の分離)がみられる。一方、その二つの物質が連結しているときには、ミクロ相分離と呼ばれるずっと小さなスケールでの周期パターンが形成されやすい。

太田・川崎は、ミクロ相分離を記述するエネルギー汎関数を導入した。これは二成分が連結されたことによるある種の弾性エネルギー(非局所エネルギーと呼ぶ)がカーン・ヒリアード汎関数に加えられたものである。体積分率の違いにより、様々な形態のパターンが観測される。

二元合金における相分離現象は自由エネルギー最小の原理という変分原理で記述され、その時間発展を記述するモデルは勾配流の構造をもっている。

勾配流方程式の特異極限問題に対応する勾配流方程式に対して、それに対する変分原理(レイリー原理)を用いることで、勾配流と変分原理を結びつけることができる。太田・川崎エネルギー汎関数の H^{-1} 内積に関する勾配流方程式を考えた場合の時間発展の研究を行い、均質化の手法による平均場モデルの厳密導出をした。

ブロックコポリマーのミクロ相分離現象を記述する自由境界問題を、1成分の体積分率が小さく、ミクロ相分離が小さい円周の集まりになるパラメーター領域で考察した。この小さな円周の集合の時間発展は、ある種の平均場モデルにより記述される。球面の平均体積オーダーの時間スケールでは、粗大化と円の半径の安定化により時間発展が支配され、円周移動はさらに大きい時間スケールでのみ影響を及ぼすことがわかる。つまり、初期の時間スケールにおいては、最初いくつかの粒子が消滅し平均面積が時間とともに増大するが、しだいに平均面積は一定値に近づいていく。本研究では、平均半径の3乗と体積分率の逆数の対数の積のオーダーの時間スケールにおける平均場モデルを厳密導出した。

さらに、ミクロ相分離現象を記述するエネルギー汎関数の変分問題を高次元の立方体領域で考察した。界面エネルギーと m 階の高階ソボレフノルムに拡張された非局所エネルギーをもつ太田・川崎タイプのエネルギー汎関数の最小エネルギーのオーダー(ミニマイザーの平均の波長)を求めた。さらにシャープインターフェースモデルにおいても最小エネルギーが $2m/(2m+1)$ 次のオーダーになることを示した。比較関数を利用することで、最小エネルギーの上からの評価が得られる。また、立方体を小立方体に分割することでできる線形作用素とその共役作用素により、 L^m ノルムと界面エネルギー(全変動)およびソボレフノルムに関する補間不等式が示され、それにより最小エネルギーの下からの評価を得た。

分数冪ラプラシアンをもつ反応拡散系の解の爆発と大域解に関する研究

半線型反応拡散系の解の爆発および大域解の存在については多くの人により研究されてきた。本研究では、分数冪ラプラシアンをもつ半線形反応拡散系を考察した。分数冪の指数は拡散効果の強さを測ると期待されるが、それが解の爆発と大域存在にどのように影響するのかを明らかにした。

具体的には、任意の非負非自明解が爆発する条件および時間大域解が存在する条件を求めた。また、ある種の常微分方程式のシステムが有限時刻で爆発することを厳密に示すことにより、十分に小さい初期データに対する爆発解のライフスパンの漸近挙動を評価することができた。

指数が小さい方が、拡散項が弱くなり、したがって爆発時間が短くなると期待される。しかしながら拡散の効果はより強くなることが明らかになった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Tomoyuki Kakehi, Yoshihito Oshita	4. 巻 59
2. 論文標題 Blowup and global existence of a solution to a semilinear reaction-diffusion system with the fractional Laplacian	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Mathematical Journal of Okayama University	6. 最初と最後の頁 175-218
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Niethammer Barbara, Oshita Yoshihito	4. 巻 59
2. 論文標題 A rigorous derivation of mean-field models describing 2D micro phase separation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1007/s00526-020-1706-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 3件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 大下承民
2. 発表標題 3 成分反応拡散系の特異極限問題
3. 学会等名 反応拡散方程式と非線形分散型方程式の挙動 OCAMI 共同研究(B)（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshihito Oshita
2. 発表標題 Minimization problems for the energy functional with a generalized nonlocal term
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshihito Oshita
2. 発表標題 Minimization problems for the energy functional with some generalized nonlocal term
3. 学会等名 Okayama workshop on partial differential equations (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshihito Oshita
2. 発表標題 Minimization problems for the energy functional with some generalized nonlocal term
3. 学会等名 幾何と解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshihito Oshita
2. 発表標題 Minimization problems for the energy functional with a generalized nonlocal term
3. 学会等名 Qualitative Theory on Nonlinear Partial Differential Equations
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yoshihito Oshita
2. 発表標題 Minimization problems for the energy functional with a generalized nonlocal term
3. 学会等名 「応用解析」定例セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yoshihito Oshita
2. 発表標題 Micro phase separation in higher dimensions
3. 学会等名 The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----