

令和 3 年 6 月 6 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K05278

研究課題名(和文) 離散非線形計画法の構築

研究課題名(英文) Formulation of discrete nonlinear programming

研究代表者

川崎 英文 (Kawasaki, Hidefumi)

九州大学・数理学研究院・名誉教授

研究者番号：90161306

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：最適化理論、不動点理論とゲーム理論へのその応用に関して、離散と連続構造に焦点を当てて研究を行った。Nashは不動点定理を用いて戦略形ゲームが混合戦略(サイコロを振る)均衡をもつことを示した。離散不動点定理を用いると純戦略(サイコロを振らない)均衡の存在を示すことができる。本研究では集積写像の離散不動点定理を用いて、展開形ゲームを束ねたゲームが純戦略均衡をもつことを示した。また、離散分離定理を用いて、L凸集合上の離散共通不動点定理を与えた。さらに、Spernerの補題に関して、方向保存写像を用いたラベリングにより、どの完全ラベル小単体も頂点のひとつが不動点になることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

最適化理論やゲーム理論は工学や経済学への応用を念頭に置いた数学理論である。Nashは不動点定理を用いて戦略形ゲームが混合戦略(サイコロを振る)均衡をもつことを示しノーベル経済学賞を受賞した。組合せ最適化問題の1つであるマッチングでは一人の男性が2人の女性と付き合うことは許されない。そのような問題ではサイコロを振らない純戦略均衡が必要になる。本研究では様々な離散不動点定理や離散分離定理を用いて、純戦略の存在に取り組んだ。

研究成果の概要(英文)：Our research focused on discrete and continuous structures on optimization theory, fixed point theory and its application to game theory. Nash used the fixed point theorem to show that any strategic game has a mixed strategy (rolling dice) equilibrium. The discrete fixed point theorem can be used to show the existence of a pure strategy (without rolling dice) equilibrium. In this study, we used the discrete fixed point theorem of accumulation mappings to show that games that bundle extensive-form games have a pure strategy equilibrium. He also used a discrete separation theorem to give a discrete common fixed point theorem on the L-convex set. Furthermore, regarding Sperner's lemma, labeling using a direction-preserving mapping showed that one of the vertices of any completely labeled subsimplex is a fixed point.

研究分野：最適化理論と不動点理論

キーワード：離散不動点定理 離散分離定理 離散凸解析 ゲーム理論 純戦略均衡 共通不動点定理 L凸集合

1. 研究開始当初の背景

最適化問題とは制約条件の下で目的関数 $f(x)$ を最大・最小化する問題のことである。変数 x が連続変量るとき連続最適化問題、 x が 0-1 や整数のような離散変量るとき離散最適化問題とよばれる。連続最適化問題の制約条件は不等式 $g(x) \leq 0$ や等式 $h(x)=0$ の形で与えられ、 f 、 g が凸関数で h が線形るとき凸計画問題、 f 、 g 、 h が非線形るとき非線形計画問題とよばれる。最適化問題では連続的な手法と離散的な手法が相まって強力な解法が提案されている。

連続最適化の理論基盤として Rockafellar (1970) の凸解析が挙げられる。一方、離散最適化の理論的枠組みとして、Whitney (1935) が導入したマトロイドがある。最小木問題などのマトロイド構造をもつ離散最適化問題は貪欲法で効率的に解くことができる。つまり、初期点から関数値が減少する方向に移動することを繰り返せば、最小解に到達できる。連続変量の凸関数もこの方法で最小解を求めることができるため、マトロイドは離散的な凸性を有すると認識されている。Edmonds (1965) はマトロイドの拡張であるポリマトロイドを導入することにより、組合せ的な概念であるマトロイドに凸多面体という幾何学的表現を与えた。つまり、ポリマトロイドは離散的な関数である劣モジュラ関数で定まる凸多面体の整数点集合である。さらに、Edmonds はポリマトロイドの交わり定理 (1970) という離散的な双対定理を与えた。凸計画問題の双対定理が理論的に重要なだけでなく、効率的なアルゴリズムの構築や最適解への収束の保証に役立ったが、交わり定理は離散最適化で同様の役割を担うことになった。これを契機に劣モジュラ関数も脚光を浴び、Lovász (1983) は離散集合 $\{0, 1\}^n$ 上の関数 f について、「 f が劣モジュラ関数であることと、 f の区分的線形拡張 (Lovász 拡張) が超立方体 $[0, 1]^n$ で凸関数であることが同値である」という離散系と連続系の懸け橋となる定理を与えた。同時期に、Frank (1982) は劣モジュラ関数のグラフと優モジュラ関数のグラフを整数係数超平面で分離する Frank の離散分離定理を与え、藤重悟 (1984) は凸計画で有名な Fenchel の双対定理の離散版を与えるなど、劣モジュラ解析を提唱して、凸性を有する離散最適化問題に対する理論的基盤を与えた。さらに、室田一雄は 1996 年以降の精力的な研究により、劣モジュラ解析を整数格子に拡張した離散凸解析を構築した。連続系の凸解析とは異なり、離散凸解析では共役関係にある M 凸と L 凸という 2 種類の凸概念が現れる。室田はそれらを用いて、離散分離定理や双対定理を与えた。離散凸解析は離散最適化の分野では常識となりつつある。

連続系で確立された理論を離散系で展開することは、不動点理論とそのゲーム理論への応用でも試みられている。研究代表者はゲーム理論や離散不動点定理の研究を通して、劣モジュラ関数が有する凸性と凹性や離散分離定理に着目して、劣モジュラ解析や離散凸解析を検証してきた。その結果、証明のいくつかの不備を指摘して別証明を与える他、複数個の L 凸集合に対する離散分離定理を得た。非線形計画法では、複数個の凸集合の分離定理を用いて最適解を満たすべき条件である KKT 条件を与えることができる。研究代表者による離散分離定理を手掛かりに、離散非線形計画法の数学的基盤を与えるという着想を得た。

2. 研究の目的

連続であれ離散であれ、凸性を有する問題は解き易く、非凸な問題は解きにくい。連続系の場合、非線形計画法という非凸な最適化問題に対する理論基盤が確立されている。一方、離散系の場合、メタヒューリスティックのような暫定解を求める手法は盛んに研究されているが、非凸な離散最適化問題に対応する数学理論は構築されていない。本研究では、研究代表者が得た複数個の離散凸集合に対する離散分離定理を手がかりに離散非線形計画法の構築を図る。

また、連続系で確立された理論を離散系で展開する試みは、不動点理論とそのゲーム理論への応用にも見られる。研究代表者がこれまで取り組んできた純戦略均衡の研究と離散凸解析は互いに関連する数学の道具を用いる。例えば、離散不動点定理と離散分離定理の間には、連続系の Markov-角谷の共通不動点定理と凸集合の分離定理のような何らかの関連があると考えられる。それを明らかにすることにより新たな解析の道具を獲得できると考える。

3. 研究の方法

数理解科学の基礎理論研究という研究の性質上、研究代表者のセミナーを軸として本研究を進めたが、他研究機関の研究者の招聘によりこれを補足した。また、日本数学会、日本オペレーションズ・リサーチ学会、日本応用数理解学会、国内外のシンポジウム・研究集会 (数理解析研究所、RAMP シンポジウム、最適化及び非線形解析・凸解析の国際シンポジウム等) に参加し、研究成果の発表と討論、研究課題に関連する最新情報の収集を行った。

4. 研究成果

(1) 岩本・木村・植野による 2 乗和型関数に対する動的な双対化を一般の凸関数に拡張した。

- (2) 方向保存写像に対する離散不動点定理の研究をおこない、 n 次元整数格子の任意の単体分割に対する方向保存写像の特徴づけ定理を与え、その応用として、 n 人戦略形ゲームに対する純戦略均衡の存在定理を与えた。
- (3) 離散的な集積写像(局所縮小写像)に対する Richard-Shih-Dong の離散不動点定理のゲーム理論への応用を行った。すなわち、 n 人戦略形ゲームの最適応答写像が集積写像であるための必要十分条件を与えた。その応用として純戦略均衡をもつ展開形ゲームの新たなクラスの定式化を行った。それは連結無向グラフからコーディネーター役のプレイヤーが全域木と根を選択するゲームであり、複数個の完全情報展開形ゲームを束ねたゲームと解釈できる。
- (4) Brouwer の不動点定理の離散版である Sperner の補題のラベリングを研究した。方向保存写像が与えられたとき、適切にラベリングを行うことにより、どの完全ラベル小単体も少なくともひとつの頂点が不動点になることを証明した。
- (5) 離散凸解析において、 M 凸性と L 凸性の他に両者を包含する整凸性の概念が重要である。整凸集合の定義には、対象となる離散集合の凸閉包をとるものと凸包をとるものの2通りがあったが、凸閉包による定義が妥当であることを示した。
- (6) 以上の研究成果を執筆中の専門書「均衡と極値の離散と連続構造」に加筆し、原稿が460頁になった。その内容は以下の通りである。

第1章：凸解析

第2章：Sperner の補題、

第3章：Brouwer の不動点定理

第4章：方向保存写像の離散不動点定理

第5章：Borsuk-Ulam の定理

第6章：縮小写像の離散不動点定理

第7章：単調写像の離散不動点定理

第8章：無限次元の不動点定理と共通不動点定理

第9章：Lefschetz の不動点定理

第10章：グラフと行列

第11章：組合せ最適化問題

第12章：凸多面体の端点と極小面

第13章：整数多面体と完全双対整数性

第14章：マトロイド

第15章：劣モジュラ系と Lovász 拡張

第16章：交わり定理と離散分離定理

第17章：整凸性

第18章： M 凸性

第19章： L 凸性

第20章：共役性

第21章：多品種流とグラフ上の L 凸性

- (7) 本研究の副産物として、折紙の数理に関する結果を得た。つまり、ねじり折りの平坦可折性の特徴づけ定理を与えた。その証明には、凸解析でよく知られた Gale の二者択一の定理と Helly の定理、Brouwer の不動点定理の集合被覆版とよばれる KKM 補題を用いた。これは折り紙の数理における不動点定理の初めての応用例である。この研究成果を執筆中の専門書「折り紙の数学」に書き加えた。現在の総ページ数は120である。
- (8) 令和2年度から4年間の基盤研究(C)「レフシェッツの不動点定理および離散不動点定理によるゲーム理論の研究」が採択された。これは本研究をさらに推し進める内容であり、本研究が評価されたものと考えられる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 9件）

1. 著者名 H. Kawasaki	4. 巻 -
2. 論文標題 An application of Richard-Shih-Dong's discrete fixed point theorem to expansive-form games	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of NACA-ICOTA2019	6. 最初と最後の頁 233-242
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Kawasaki	4. 巻 21, No. 1
2. 論文標題 Completion of the proof of flat-foldability theorem for twist fold by KKM lemma	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Nonlinear and Convex Analysis	6. 最初と最後の頁 119--125
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 H. Kawasaki	4. 巻 5
2. 論文標題 An aspect of Sperner's lemma as a fixed point theorem	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Linear and Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 67-71
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 川崎英文	4. 巻 2126
2. 論文標題 Spernerの補題に基づく離散不動点定理	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 122-127
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 川崎英文	4. 巻 2078
2. 論文標題 縮小写像の離散不動点定理と純戦略均衡	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 134-140
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 H. Kawasaki and S. Hashiyama	4. 巻 18
2. 論文標題 A discrete fixed point theorem utilizing the directionn preserving condition	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Nonlinear and Convex Analysis	6. 最初と最後の頁 1535-1545
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 H. Kawasaki	4. 巻 60
2. 論文標題 Dynamic dualization in a general setting	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of the Operations Research Society Japan	6. 最初と最後の頁 43-49
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 H. Kawasaki	4. 巻 60
2. 論文標題 An application of a theorem of alternatives to origami	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of the Operations Research Society Japan	6. 最初と最後の頁 393-399
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 川崎英文	4. 巻 2044
2. 論文標題 二者択一の定理の折り紙への応用	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 193-198
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 川崎英文	4. 巻 1990
2. 論文標題 複数個のLナチュラル凸集合に対する離散分離定理	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 161-167
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計20件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 川崎英文
2. 発表標題 離散共通不動点定理
3. 学会等名 第24回情報・統計科学シンポジウム
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 H. Kawasaki
2. 発表標題 An aspect of Sperner's lemma as a discrete fixed point theorem
3. 学会等名 International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 H. Kawasaki
2. 発表標題 An application of discrete fixed point theorems to the game theory
3. 学会等名 2019 National Taiwan Normal University -Kyushu University Joint Forum on Facilitating Interdisciplinary Research and Education (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 川崎英文
2. 発表標題 Spernerの補題の離散不動点定理としての側面
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所研究集会：数理計画問題に対する理論とアルゴリズムの研究
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 川崎英文
2. 発表標題 Spernerの補題に基づく離散不動点定理
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 諫山博人, 川崎英文
2. 発表標題 ねじり折りの剛体可折性とねじり折りをを用いた剛体平織りの数え上げ
3. 学会等名 日本応用数学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 H. Kawasaki
2. 発表標題 An application of Richard-Shih-Dong's discrete fixed point theorem to games in extensive form
3. 学会等名 The International Workshop on Nonlinear Analysis and Optimization (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 川崎英文
2. 発表標題 ねじり折り平坦可折定理の証明の完成
3. 学会等名 日本応用数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 H. Kawasaki
2. 発表標題 Completion of the proof of flat-foldability theorem for twist fold by KKM lemma
3. 学会等名 The 6th Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 川崎英文
2. 発表標題 Spernerの補題と離散不動点
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所研究集会：不確実性の下での意思決定の数理とその周辺
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 H. Kawasaki
2. 発表標題 An application of theorems of alternatives to origami--twist fold
3. 学会等名 The Tenth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 H. Kawasaki
2. 発表標題 A discrete fixed point theorem and an existence theorem of a pure-strategy equilibrium
3. 学会等名 21st Conference of the International Federation of Operational Research Societies (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 川崎英文
2. 発表標題 縮小写像の離散不動点定理と純戦略均衡
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所研究集会：不確実性の下での意思決定理論とその応用：計画数学の展開
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 川崎英文
2. 発表標題 二者択一の定理, Helly の定理, KKM 補題によるねじり折りの考察
3. 学会等名 第22回情報・統計科学シンポジウム
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 川崎英文
2. 発表標題 縮小写像の離散不動点定理とその応用
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2018年春季研究発表会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 川崎英文
2. 発表標題 Hellyの定理とKKM補題によるねじり折りの考察
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2018年春季研究発表会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 川崎英文
2. 発表標題 n戦略形ゲームの純戦略均衡と方向保存条件
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季発表会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 H. Kawasaki
2. 発表標題 Pure strategy equilibria for an n-person strategic game
3. 学会等名 International Workshop on Nonlinear Optimization and Applications 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 川崎英文
2. 発表標題 二者択一の定理の折り紙への応用
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所研究集会「確率的環境下における数理モデルの理論と応用」
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 H. Kawasaki
2. 発表標題 Integral convexity, M-convexity, and L-convexity in discrete convex analysis
3. 学会等名 International Workshop on Nonlinear Optimization and Applications 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------