

令和 2 年 7 月 1 日現在

機関番号：21401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05280

研究課題名(和文)非凸制約可能性問題に対する効率的解法の開発とその応用

研究課題名(英文)On efficient algorithms for nonconvex feasibility problem and its applications

研究代表者

松下 慎也 (Matsushita, Shin-ya)

秋田県立大学・システム科学技術学部・准教授

研究者番号：20435449

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、非凸制約可能性問題に対する実用的な解法を提案することを目的とする。非凸な制約集合を取り扱うために、不動点近似法、近接勾配法、射影法やDouglas-Rachford法などを改良した解法について調査した。特に、不動点近似法と近接点法の収束率について、いつかの関連する結果を与えた。さらに、提案手法の理論的、数値的な特性について調査をおこなった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非凸制約集合は、制御工学における安定性や画像復元技術など、様々な分野で現れる重要な概念である。近年、非線形解析学の分野で研究されていた射影法が非凸集合に関連する制約可能性問題に有効であることが明らかになっているが、その理論的な収束の保証や収束率については解明されていないのが課題となっていた。

研究成果の概要(英文)：This research aims to develop efficient methods for solving nonconvex feasibility problems. To deal with the non-convex constraint sets, we have investigated modification of a variety of optimization methods, such as fixed-point approximation methods, the proximal gradient method, the projection methods, the Douglas-Rachford method. In particular, we have presented some relevant convergence rate results for fixed-point approximation method and the proximal point algorithm. Moreover, we have investigated theoretical and numerical properties of the proposed methods.

研究分野：数理工学、応用数学

キーワード：制約可能性問題 非凸集合 射影法

## 1. 研究開始当初の背景

実社会における様々な問題はしばしば複数の集合の共通部分として自然に表現する事ができる。このモデルは制約可能性問題と呼ばれ、所望の条件を全て満足する解を見つけるための理想的な数理モデルであり、数学だけにとどまらず工学、経済学などの問題を含む非常に有用な問題である。

既存の制約可能性問題に対する解法では通常、制約集合は凸集合であることが仮定されており、有効な解法として射影法などが知られている。一方、スパースモデリングで現れる関数を持つ性質、制御工学に現れるモデル低次元化で現れる集合を持つ構造などは非凸性を含むことから、既存の方法を適用することが困難である為いまだ課題があると言える。

一方、非線形解析学の分野では不動点問題を解くための様々な解法がこれまでに提案されている。先に述べた射影法は不動点アルゴリズムの一つとして知られている。また凸最適化問題に対する近接点法や Douglas-Rachford 法などの凸最適化アルゴリズムは不動点アルゴリズムとして扱うことができる。凸最適化アルゴリズムの収束の有効性を評価する研究は、目的関数を利用することで部分的に行われているものの、不動点アルゴリズムは目的関数を利用することができないため、より統一的な理論を構築するための大きな障壁となっている。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、非凸制約可能性問題を効率的に解くための解法開発および関連する不動点アルゴリズムの収束の評価に関する研究を行う。特に非線形関数解析学の分野で活発に研究されている射影法および関連する最適化アルゴリズムの知見を用いて、非凸制約可能性問題を解決する求解法を開発する。また関連する不動点アルゴリズムについて、その収束の速さを評価するための指標を与える。

## 3. 研究の方法

非凸制約可能性問題については、非凸構造を持つ集合について調査する必要がある。これには行列のランク制約や固有値制約を持つ非凸集合に関する先行研究を手がかりに、関連する他の非凸集合に対する射影を構成的に計算できるかを調べる。また、最近の非凸集合に対する射影を用いた最適化アルゴリズムの知見を応用する。

不動点アルゴリズムの収束の評価については、先行研究で得られていた近接点法と Douglas-Rachford 法の収束の速さを評価する研究を参考にして、それらを不動点アルゴリズムに応用することで既存の結果を統一的に扱うことができるかを検討する。

上記の研究方法を遂行するための具体的な研究方法について以下に示す。

- ◇ 国内外を問わず関連する学会(非線形解析学と凸解析学についての国際会議(NACA)、非線形解析学と最適化に関するアジア会議(NAO-Asia)、日本数学会、OR学会など)研究集会(京都大学数理解析研究所研究集会など)に積極的に参加して講演をすることで、本研究に関する意見を求めるとともにディスカッションを行う。
- ◇ 関連書籍、オンラインジャーナル(SIAM, Springer, Elsevier など)を活用して情報収集をおこなう。さらに関連分野の研究者達との研究打ち合わせによって関連情報を収集しながら以降の研究の方向性を設定する。
- ◇ 得られた成果は論文としてまとめ、プレプリントサーバー(arxiv など)に発表するとともに学術雑誌に投稿する。
- ◇ ソフトウェア(MATLAB など)を援用した数値実験を実施することで、その有効性の検証を行う。

## 4. 研究成果

研究方法で挙げた内容に対して、以下の成果が得られた。

- (1) 非凸制約可能性問題に対する解法について：  
制御工学における制御設計問題(静的出力・状態フィードバック安定化問題など)は、非凸性を含むため、既存の内点法などの凸最適化アルゴリズムが適用できないことが課題であった。この設計問題は非凸制約可能性問題として再定式化できるため、Douglas-Rachford 法および射影法の改良を応用した解法を提案し、その有効性の検証を行った。数値実験を実施した結果、既存の解法と提案手法の比較をすることで提案手法が高い収束性を持つことを確認した。一方で、提案アルゴリズムで使用した非凸集合に写る写像の計算には、疑似的な射影が使われていたため、提案手法が解に理論的に収束することを保証するにはさらなる検討・調査が必要であることが今回の研究から明らかとなった。得られた研究成果の一部は、計測自動制御学会東北支部研究集会および最適化法とその応用に関する研究集会で発表した。

- (2) 不動点アルゴリズムの収束の評価について：  
不動点アルゴリズムとして広く知られている Krasnosel'skiĭ-Mann の不動点アルゴリズムの収束の速さの評価について検討した。このアルゴリズムはヒルベルト空間およびバナッハ空間における非線形写像の不動点を近似することが可能であるが、その収束の速度を評価するには検討が不十分であった。そこで、不動点アルゴリズムから生成される近似列の残差が零に収束するという性質 (asymptotic regular) に着目した。この性質を不動点アルゴリズムの性能の評価指標として利用し、既存の評価式が改善できることを理論的に示した。得られた成果は論文としてまとめ、学術雑誌に掲載された。また、関連する研究成果は、ベトナムで開催された国際会議 (New Trends in Optimization and Variational Analysis for Applications (NewTOVAA))、国内学会 (日本数学会 2016 年度秋季総合分科会、日本数学会 2017 年度年会、第 57 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム) にて発表した。
- (3) 関連する凸最適化アルゴリズムの収束の評価について：  
(2) の研究に関連して、既存の凸最適化アルゴリズムの収束速度の評価式が改善できるかを検討した。特に、近接点法の目的関数の収束の評価式について、1991 年に有限次元空間で得られていた近接点法の評価式が一般のヒルベルト空間でも成り立つことを示した。またその応用として、関連する交互射影法および平均射影法の収束の速さの評価式を与えた。得られた成果は論文としてまとめ、学術雑誌に掲載された。また、関連する研究成果は、オーストラリアで開催された国際会議 (The 12th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications (ICFPTA 2017))、北海道で開催された国際会議 (The 10th Anniversary International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2017))、オーストリア・ウィーンで開催された国際会議 (Modern Maximal Monotone Operator Theory: From Nonsmooth Optimization to Differential Inclusions)、国内学会 (日本数学会 2017 年度秋季総合分科会) にて発表した。

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.aki ta-pu.ac.jp/system/elect/sce/matsushita/>

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Shin-ya Matsushita	4. 巻 3
2. 論文標題 On the finite termination of the gradient projection method	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Nonlinear and Variational Analysis	6. 最初と最後の頁 19-26
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.23952/jnva.3.2019.1.03	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Shin-ya Matsushita and Li Xu	4. 巻 19
2. 論文標題 On the Haugazeau-like projective method for the sum problem	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Nonlinear and Convex Analysis	6. 最初と最後の頁 1515-1523
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shin-ya Matsushita	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 A convergence rate of the proximal point algorithm in Banach spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Optimization	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/02331934.2018.1432609	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shin-ya Matsushita, Li Xu	4. 巻 65
2. 論文標題 On the finite termination of the Douglas-Rachford method for the convex feasibility problem	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Optimization	6. 最初と最後の頁 2037-2047
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/02331934.2016.1209674	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shin-ya Matsushita	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 On the convergence rate of the Krasnosel'skii-Mann iteration	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Bulletin of the Australian Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S000497271600109X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計14件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Shin-ya Matsushita
2. 発表標題 Rates of asymptotic regularity for the forward-backward splitting algorithm
3. 学会等名 Modern Maximal Monotone Operator Theory: From Nonsmooth Optimization to Differential Inclusions, Workshop 2 on Numerical Algorithms in Nonsmooth Optimization (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shin-ya Matsushita
2. 発表標題 On a splitting method for maximal monotone operators
3. 学会等名 The Sixth Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (NAO-Asia2018) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松下慎也
2. 発表標題 作用素分割法の収束の評価について
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会・実関数論分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松下慎也
2. 発表標題 不動点近似法に対する収束解析
3. 学会等名 第57回実函数論・函数解析学合同シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松下慎也
2. 発表標題 極大単調作用素の和のリゾルベントについて
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所共同研究(公開型)「非線形解析学と凸解析学の研究」
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shin-ya Matsushita
2. 発表標題 Convergence rates of the proximal point algorithm
3. 学会等名 The 10th Anniversary International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shin-ya Matsushita
2. 発表標題 On the convergence rate of the proximal point algorithm
3. 学会等名 The12th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 松下慎也
2. 発表標題 近接点法の収束について
3. 学会等名 日本数学会2017年度秋季総合分科会・実関数論分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 松下慎也
2. 発表標題 作用素分割法の収束について
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会・実関数論分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松下慎也
2. 発表標題 On convergence of the fixed point iterations
3. 学会等名 RIMS共同研究「非線形解析学と凸解析学の研究」
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 松下慎也
2. 発表標題 Alternating direction method of multipliersの収束について
3. 学会等名 日本数学会2016年度秋季総合分科会, 実関数論分科会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Shin-ya Matsushita
2. 発表標題 On the existence of solutions to the sum problem
3. 学会等名 The fifth Asian conference on Nonlinear Analysis and Optimization (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Shin-ya Matsushita
2. 発表標題 On the convergence rate of the fixed point iterations
3. 学会等名 New Trends in Optimization and Variational Analysis for Applications (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 松下慎也
2. 発表標題 Krasnosel'skii-Mann iteration の収束について
3. 学会等名 日本数学会2017年度年会, 実関数論分科会
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----