2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：３４４２８
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６K０５３３２
研究課題名（和文）時空の隠れた対称性とアインシュタイン計量

研究課題名（英文）Hidden symmetry of spacetime and Einstein metric

研究代表者
安井　幸則（Yasui, Yukinori）

摂南大学・理工学部・教授

研究者番号：３０１９１１１７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,700,000円

研究成果の概要（和文）：キリングテンソル場は時空の隠れた対称性を記述するテンソル場である。なぜなら，キリングテンソル場と測地線方程式の保存量との間には１対1の対応があるからである。古典力学の多くの問題は，曲がった時空上の測地線方程式を解く問題に帰着することが知られている。したがって，キリング方程式の可積分条件を求めることは力学系を調べる上できわめて重要な問題である。本研究において，私たちはキリング方程式の「延長」（prolongation)をヤング図形を使って定式化した。延長された方程式の解は、ある種のベクトル束上の平行切断と見ることができる。このことを使って，キリング方程式の可積分条件を陽に書き下すことに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
キリング方程式の可積分条件を調べる研究は長い歴史を持つ。しかしながら，これまでに得られている結果は非常に複雑なものであり，大がかりなコンピュータ計算を行わない限り時空上にキリングテンソルが存在するかどうかを判定することは難しい。本研究では，キリング方程式を延長することにより，時空の曲率テンソルを使って可積分条件を陽に表すことに成功した。これにより，キリングテンソルの存在条件は，「ヤング図形から定まる曲率テンソル=0」という方程式と同値になる。この結果は，キリング方程式の可積分条件を簡単かつ明瞭に表現しており，多くの力学系への応用が期待できる。

研究成果の概要（英文）：Killing tensor fields have been thought of as describing hidden symmetry of space(-time) since they are in one-to-one correspondence with polynomial first integrals of geodesic equations. Since many problems in classical mechanics can be formulated as geodesic problems in curved spaces and spacetimes, solving the defining equation for Killing tensor fields (the Killing equation) is a powerful way to integrate equations of motion. Thus it has been desirable to formulate the integrability conditions of the Killing equation, which serve to determine the number of linearly independent solutions and also to restrict the possible forms of solutions tightly. We show the prolongation for the Killing equation in a manner that uses Young symmetrizers. The prolonged equations can be viewed as the equations for parallel sections of the vector bundle, whose fibre is the space of differential forms. Using these equations, we provide the integrability conditions explicitly.

研究分野：数理物理学

キーワード：キリングテンソル場　ブラックホール

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

時空の隠れた対称性とは，表 1 のテンソルによって記述されるキリング・矢野対称性のことである。時空の対称性というとき, 通常はキリングベクトルが表現する計量の対称性を意味する。しかしながら，本研究の対称性は高階（反）対称テンソルによって記述される対称性であり，計量の対称性と直接結びつくものではない。歴史的には，Carter(1968 年)によるカー時空上の測地線方程式の保存量の発見に始まる。この保存量は 2 階のキリングテンソルによって与えられる。その後，Penrose-Floyd(1972 年)により Carter の保存量が共形キリング・矢野テンソル(以後 CKY)と略す)の“ 2 乗 ”で与えられることが示された。彼らは CKY を使って，カー時空上の測地線方程式が変数分離することの幾何学的な説明を与えた。さらに，クライン・ゴードン方程式，ディラック方程式，重力摂動方程式の変数分離性，そして曲率テンソルの代数数的特性等々，カー時空上の「ミラクルな性質」の背後にキリング・矢野対称性が存在することが明らかになってきた。

表１．キリング・矢野対称性

ベクトル	キリングベクトル	共形キリングベクトル
対称テンソル	キリングテンソル	共形キリングテンソル
反対称テンソル	キリング・矢野テンソル	共形キリング・矢野テンソル

２．研究の目的

カー時空以外にもキリング・矢野対称性を持つ時空は存在するのか。この疑問に対し，次の一意性定理が知られている。

定理　閉条件をみたす 2 階の CKY が存在することを仮定する。このとき，真空のアインシュタイン方程式をみたすブラックホール時空が任意の次元で一意的に定まる。

この定理は，大田-宝利との共同研究“ Closed conformal Killing-Yano tensor and uniqueness of generalized Kerr-NUT- -de Sitter spacetime”（2009 年)で得られた結果である。このブラックホール時空は Kerr –NUT–AdS 時空とよばれており，トポロジーが球形のホライズンをもつ最も一般的な D 次元時空である。特に，D=4 とし，宇宙項と NUT 電荷をゼロにおくとカー時空に帰着する。物質場が存在するとき，この定理をどのように拡張したらよいのか。さらに，一般次元におけるキリング・矢野対称性を許す時空の分類および，その性質を解析することが本研究の目的である。

(1) キリング・矢野対称性の次元公式

時空が与えられたとき，キリング・矢野対称性が存在するかどうかを判定する方法を見つけることは基本的な問題である。本研究では，「延長」(prolongation)という手法を用いて，キリング・矢野テンソルの次元公式を作成する。これは，CKY の次元が有限次元であることを証明した Semmelmann　(2002 年)の研究を拡張するものである。表 1 のテンソルに対し，対称性の次元を計算する Mathematica プログラムを作成し，4 次元時空の隠れた対称性を解析する。

(2) アインシュタイン計量の構成

時空にキリング・矢野対称性が存在するとき，対応するテンソルの不変量を使って自然な座標が導入できる。計量テンソルが陽に書けるということは,「よい座標」が存在することである。キリング・矢野対称性を許す時空はよい座標を持つため，計量テンソルを具体的に書き下すことが可能となる。超重力理論の BPS 解を記述するカラビ・ヤウ計量，佐々木・アインシュタイン計量，超ケーラー計量等々，現在知られている多くのアインシュタイン計量は，高次元ブラックホール時空のウイック回転から誘導できる。この背景にある対称性は，ブラックホール時空のキリング・矢野対称性である。本研究では，キリング・矢野対称性を許すブラックホール時空および，それから誘導されるアインシュタイン計量の具体的な構成を行うことを目的とする。

３．研究の方法

(1) キリング・矢野対称性の基本的な特徴および背後にある時空の対称性の解明

キリング・矢野対称性を記述する偏微分方程式は，未知変数の数より方程式の数が多い overdetermined system である。方程式が与えられたとき，

① 解は存在するか。
② もし存在するなら，その次元はいくつか。
③ どのように解を構成するか。

これらの事項は基本的な問題である。一般には非常に難問であるが，幸いにも本研究で扱う表 1 のテンソルが従う方程式は解析的なアプローチが可能なものになっている。overdetermined system であるため解空間の次元が有限次元であることがその理由である。実際,「延長」(prolongation)と呼ばれる手法によって方程式は幾何学的なデータに翻訳され，ヤング図形で

定まるベクトル束上の平行切断の空間として解空間を捕らえることができる。延長は偏微分方程式の一般論として長い歴史をもっているが，具体的に可積分条件を解くところまで議論している文献はそれほど多くない。キリング・矢野対称性の場合，その次元を求める問題は，最終的にオーダー100×100 サイズの行列の階数を求める問題に帰着する。本研究では，表１のテンソルに対し Mathematica を使ってベクトル束上の平行切断をカウントするプログラムを作成する。

(2) コンパクト多様体上のアインシュタイン計量の構成

橋本-阪口との共同研究“ New infinite series of Einstein metrics on sphere bundles from AdS black holes ”(2005 年)で行ったアインシュタイン計量の構成は次の 3 つのステップからなる：

① ブラックホール時空をウイック回転してユークリッド化する。

② ホライズン近傍をスケーリング操作と組み合わせ切り取ることにより，多様体をコンパクト化する。

③ ブラックホール時空の質量，角運動量，宇宙項を離散的なパラメータに“量子化”することにより，コンパクト多様体上に特異点のないスムーズなアインシュタイン計量を誘導する。

こうして得られるカラビ・ヤウ計量および佐々木・アインシュタイン計量は，高次元重力理論のコンパクト化の問題や N=1 超対称性を保つ AdS/CFT 対応の研究において重要な役割を果たす。本研究では，上記の構成方法とブラックホール時空のキリング・矢野対称性を利用してアインシュタイン計量の組織的な構成を行う。

４．研究成果

(1) キリングテンソルの延長

曲がった時空上のキリングテンソルは時空の隠れた対称性を記述する。キリングテンソルの個数は，測地線方程式の保存量（運動量変数に関して多項式）と１対１に対応する。
そして，その個数には Barbance-Delong- Takeuchi-Thompson 公式として知られている上限が存在する。本研究では，キリング方程式の延長に対しヤング図形による定式化を行った。延長された変数は，ヤング図形で定まるベクトル束の平行切断として与えられる。ベクトル束の階数はキリングテンソルの上限と一致する。平行切断の個数，つまりキリングテンソルの個数は，ベクトル束上のホロノミー群を評価することにより調べることができる。これは方程式の可積分条件を幾何学的に表現したものにほかならない。たとえば，4 次元時空の計算として表 2 の結果を得た。

表２．ブラックホール時空上のキリングテンソルの個数

4 次元計量/キリングテンソルの階数	1	2
最大対称空間	10	50
Schwarzshild	4	11
Kerr	2	5
Reissner-Nordstrom	4	11

Mathematica を使って種々の時空上でホロノミー群（可積分条件）を計算することにより次の予想に導かれた。

予想：平行切断の可積分条件は長方形のヤング図形によって表現される。

近年，Mathematica，Maple 等々を使って，時空の対称性を計算する種々のコンピュータプログラムが開発されている。しかしながら，多くのプログラムは時空の隠れた対称性に対し有効に働くものになっていないのが現状である。本研究の手法は，幾何学的かつ代数的なアプローチであり，コンピュータプログラムに対しても時空の対称性を評価する有効な道筋を提供するものと考える。

(2)アインシュタイン計量の構成

正のスカラー曲率を持つコンパクトなアインシュタイン多様体の知られている例はそれほど多くない。最初の非等質な例は Page によって構成された。彼は 4 次元ブラックホール計量から，ホライズン近傍をスケーリングし、複素射影平面上の球面束にアインシュタイン計量を誘導した。その後 Berard- Bergery は，底空間を正の第１Chern 類を持つ Kahler-Einstein 多様体の場合に拡張した。本研究では，Page の構成を拡張し，高次元ブラックホール計量を解析接続することにより非等質でコンパクトな多様体上にアインシュタイン計量を組織的に構成した。主要な結果は以下のとおりである。

B を正の第１Chern 類を持つコンパクトなケーラー多様体（Fano 多様体）とする。このとき第１ Chern 類は底空間の 2 次のコホモロジークラスをｐ（p は正の整数）倍したもので与えられる。Fano 多様体 B にはアインシュタイン計量が入ることを仮定する。このとき以下の定理が成立する。

定理 k1,k2,⋯,kn を自然数とし，k1+k2+⋯+kn <p を満たすとする。このとき，Fano 多様体 B 上のトーラス束に随伴する球面束上に正のスカラー曲率をもつアインシュタイン計量が存在する。

(3) 高次元カー時空上のマックスウェル方程式の変数分離性

表 3．変数分離する高次元カー時空上の場の方程式

	4 次元	D 次元（D>4）
測地線	○	○
クライン・ゴードン	○	○
ディラック	○	○
マックスウェル	○	△
重力摂動	△	×

表 3 の意味は次のとおりである。○は方程式の変数分離性がキリング・矢野対称性から誘導されていることを表す。△は変数分離されてはいるものの、その起源が不明瞭であることを表す。×は未知の部分であり，ここ 20 年の未解決問題である。

最近，高次元ブラック時空上でのマックスウェル方程式の変数分離性が Lunin (2017 年)によって示された。4 次元の解析についてはニューマン・ペンローズ技法と呼ばれる強力な方法があり、その路線に従ってマックスウェル方程式の変数分離性が示されていた。本研究では Lunin の仕事を一般化し D 次元ブラックホール時空上でマックスウェル方程式の変数分離性を導く「からくり」が，D+２次元時空の階数 2 のキリングテンソルであることを明らかにした。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）
著者名：Tsuyoshi Houri, Kentaro Tomoda, Yukinori Yasui
論文表題：On integrability of the Killing equation
雑誌名：Classical and Quantum Gravity
査読有り
35 巻 2018 年 075014
DOI: 10.1088/1361-6382/aaa4e7

〔学会発表〕（計　9 件）
① 安井幸則，時空の隠れた対称性，The 2nd workshop on Mathematics and Physics in General Relativity, 摂南大学，2019 年 3 月
② 安井幸則，一般相対論の数理：時空の隠れた対称性，日本物理学会，九州大学，2019 年 3 月
③ 宝利剛，棚橋典大，安井幸則，A Killing-Yanoansatz for gravitational perturbations on a Myers-Perry black hole, 日本物理学会，九州大学，2019 年 3 月
④ 宝利剛，棚橋典大，安井幸則，Kerr 時空を背景時空とする Maxwell 方程式の変数分離性について，日本物理学会，信州大学，2018 年 9 月
⑤ 友田健太郎, 宝利剛, 安井幸則， 正準幾何学による古典可積分系の判定, 日本応用数学会, 武蔵野大学，2017 年 9 月
⑥ 友田健太郎，宝利剛，安井幸則， On integrability of the Killing equation, Finite dimensional integrable systems in geometry and mathematical physics, Campus de Bellaterra, Spain, 2017 年 7 月
⑦ 友田健太郎，宝利剛，安井幸則， Prolongation of the Killing equation via the Young Symmetrizer, 日本物理学会，大阪大学，2017 年 3 月
⑧ 安井幸則，キリング・矢野対称性とアインシュタイン計量，五色浜相対論研究会，2016 年 9 月
⑨ 友田健太郎,宝利剛,安井幸則 Integrability condition for Killing- Stackel tensor, 日本物理学会，宮崎大学，2016 年 9 月

６．研究組織
(1)研究分担者
　なし
(2)研究協力者
研究協力者氏名：宝利 剛
ローマ字氏名：HOURI TSUYOSHI

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。