

令和 2 年 6 月 19 日現在

機関番号：14602

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05474

研究課題名(和文)位相振動子系の同期非同期転移と古典XYモデルの相転移の対応関係の解明と統一理論

研究課題名(英文) Study on correspondence between synchronization-desynchronization transition in phase oscillator network and phase transition in classical XY model, and unification theory

研究代表者

上江洩 達也 (Uezu, Tatsuya)

奈良女子大学・自然科学系・教授

研究者番号：10160160

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：秩序無秩序相転移を示す古典XYモデルと同期非同期転移を示す位相振動子系において、以前の研究で、あるクラスの無限レンジ相互作用の場合に対応関係が存在することが分かったが、この関係がどのような状況で成立するかを、相互作用の到達距離やランダムネスの有無、系のトポロジーなどを変えて研究を行った。その結果、局所場が構成素子や時間に依存せず秩序変数が有限個なら、対応関係があることを示した。更に、それ以外の場合、例えば、フラストレーションのあるランダムな無限レンジ相互作用、Sherrington-Kirkpatrick型相互作用においても、スピングラス秩序変数等に対応関係が存在する事を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

我々は、平衡相転移を示す磁性体のXYモデルと非平衡相転移である同期非同期転移を示す位相振動子モデルにおいて、秩序変数の従う方程式やその解、臨界現象に、対応関係が存在する一般的な条件を調べ、局所場と呼ばれる量が構成素子や時間に依存せず、秩序変数の個数が有限個なら、両系に対応関係が存在する事を明らかにした。更に、この条件を満たさない、ランダムでフラストレーションのある無限次元相互作用の場合にも対応関係が存在する事を示した。対応関係により、平衡系または非平衡系のどちらか一方で秩序変数の方程式や解、臨界現象が分かれば、直ちに他方においてもこれらの事が分かるため、様々な新規な現象の発見が期待される。

研究成果の概要(英文)：Previously, for a class of infinite-range interactions, we found the correspondence between the XY model in which the order-disorder phase transition occurs and phase oscillator networks in which the synchronization-desynchronization phase transition occurs. In order to clarify interactions where the correspondence between two models exists, we studied several models by changing interaction range with or without randomness, topology and so on.

As a result, we found that if the local fields do not depend on elements and time, and the number of order parameters is finite, the correspondence exists. Furthermore, we found that even if these conditions are not satisfied, the correspondence can exist. For example, we numerically studied the infinite range random interaction with frustration, the so-called Sherrington-Kirkpatrick model in the spin systems, and found that there exist the correspondence of the distribution of the local field and spin glass order parameter in both models.

研究分野：統計力学、非線形力学、情報統計力学

キーワード：古典XYモデル 位相振動子系 臨界現象 同期非同期転移 SKモデル 蔵本モデル スピングラス 局所場

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

平成 23 年度～27 年度において、本研究課題の基礎となる成果が得られている(引用文献)。具体的には、位相振動子系で、1 次元トラス上のメキシカンハット型相互作用の場合および、より一般に 2 つのフーリエ成分を持つ場合に、位相の自己無撞着方程式を導いた。そして、蔵本モデル、1 次元トラス上のメキシカンハット型相互作用、連想記憶型相互作用の場合に、位相振動子系と古典 XY モデルの方程式を統一し、その解の一意性を示した。また、メキシカンハット型相互作用の場合には、不安定解の方程式を統一的に記述し、相境界を記述する方程式を一意的に導出して、相境界の 1 対 1 対応を示した。更に、対応関係が成立する相互作用を一般化した。一方、連想記憶型相互作用においては、XY モデルの解が連続的に存在する(連続解)。従って、位相振動子系でも連続解が定常解として存在するが、数値計算を行うと、振動解が得られ定常解は不安定化している。しかしながら、システムサイズを大きくすると、振動解の周期が増大する傾向がみられた。これらの成果は、本研究課題の基礎となるものであり、また、提起された問題は、本研究課題のテーマとなっている。

2. 研究の目的

自然界に広く存在する同期現象を記述するモデルである位相振動子モデル(同期非同期転移を示す非平衡系)と磁性体のモデルである XY スピンモデル(秩序無秩序相転移を示す平衡系)は多くの研究が蓄積されているが、申請者は、この両系があるクラスの同じ相互作用を持つとき、系を記述する秩序変数の方程式に対応関係が存在することを発見し、統一方程式を導いた。また、自然振動数分布の幅と温度が対応することを示した。本研究では、系の次元やトポロジー、相互作用の到達距離、ランダムネスの有無などを変え、方程式、その解、および外場への応答という観点から両系の対応関係の有無、成立条件を研究し、統一理論を構築することを目的としている。両系の対応関係を用いることにより、膨大な研究蓄積がある XY モデルの知見より、同期現象の新たな動的秩序状態の発見へとつなげることができる。

3. 研究の方法

古典 XY モデルと位相振動子系について、系の次元は 1、2 次元、トポロジーは、1、2 次元トラス、ランダムネスは、ランダムネス無し、ガウス型、バイナリー型、相互作用の到達距離は無限大、非局所、短距離について、研究した。理論計算と数値シミュレーションで解析し両系での対応関係の有無を調べた。また、外場への応答や臨界現象について、両系での対応関係の有無を系統的に研究した。更に、ガウス型のランダム相互作用を持つ場合、XY モデルのスピングラス相に対して、位相振動子系の相について、局所場(Local Field, LF)やスピングラスオーダーパラメータを数値的に計算することにより、外部パラメータ依存性を調べた。以上について、清川修二(奈良女子大学大学院自然科学系准教授)、木本智幸(大分工業高等専門学校教授)、雑賀洋平(群馬工業高等専門学校教授)と 3 年の研究計画を立案し、最終的には 1 年延長して研究を行った。理論解析は主として研究代表者の上江洌が行い、数値解析は、主として研究分担者の木本が行った。雑賀は臨界現象の研究で数値解析を行った。そのほか、研究協力者として、奈良女子大学理学部数物科学科 4 回生(当時)の林美里、同大学院数物科学専攻修士課程学生(当時)宮田佳奈、戸田光、同大学理学部数物科学科 4 回生(当時)岡本優花も、数値計算を行った。

4. 研究成果

以下に、テーマごとの研究成果を記す。年度は省略する。

(1) 2 次元トラス上のメキシカンハット型相互作用

方程式の対応関係が存在するメキシカンハット型相互作用について、2 次元トラス上の系を扱った。我々は、17 個の実数の秩序変数を有する場合を扱い、その従う連立積分方程式の解を数値的に求めた。また、数値シミュレーションを行い、両系においてどのような解が存在するのかを調べた。その結果、両系で、同じ種類の安定解が複数個存在することが明らかになった。また、秩序変数だけでなく、トラスの 2 つの独立な軸の周りの回転数も対応することを明らかにした。

(2) 外場への応答と臨界現象

あるクラスの無限レンジ相互作用について、位相振動子系で外場への応答が調べられ、臨界指数とそれらの間の関係式が知られている。我々の理論を外場のある場合に拡張することにより、両系の統一方程式を導き、XY モデルと位相振動子系の臨界指数とそれらの間の関係式にも対応関係があることを示した。

(3) 到達距離無限大、ランダムでフラストレーションのある相互作用、SK 型相互作用、を有する系の対応関係

相互作用がガウス分布から生成される場合、XY モデル(SK モデル)はレプリカ法により解析され、低温にすると、常磁性相からスピングラス相(磁化がランダムに凍結している状態)へ相転移する。一方、同じ相互作用を有する位相振動子系では、自然振動数分布がガウス型の場合、その標準偏差を小さくすると、局所場の分布のピークが 0 から有限の値に変化する相転

移(Volcano transition)が起こり、実質振動数がほぼ等しい振動子の集団では、相対位相が拡散する quasi entrainment (QE)という特異な状態となっていることが知られている。我々は、数値計算により、両系の相転移点に対応関係で予想される値と一致する事、対応するパラメータでの局所場のヒストグラムが極めて類似している事、さらに、位相振動子系でスピングラスオーダーパラメータを数値的に計算する方法を考案し、XYモデルの理論曲線とほぼ一致する事を見出した。また、局所場の自己無撞着方程式を、XYモデルの時には一般的に、位相振動子系では、同期解のみが存在する場合に導出した。この結果は、論文として公表されている。また、局所場の自己無撞着方程式について、非同期解が存在するときにも近似的な方程式を導出した。その過程で、XYモデルと位相振動子系のハイブリッドモデルを用いて、位相の分布密度の対応関係を導出した。

(4) 1次元トーラス上の非局所相互作用でランダムネスが無い場合の対応関係と外場への応答

指数的に減衰する相互作用を用いて解析した。オーダーパラメータを局所場とし、XYモデルではマルコフチェーンモンテカルロシミュレーション(MCMC)でLFの温度依存性を、位相振動子系では数値積分でLFの自然振動数の標準偏差()依存性を調べた。数値計算の結果はLFの大きさの素子依存性がないため、それを仮定して両系で理論的にLFの自己無撞着方程式を導出した。理論結果とシミュレーション結果は非常によく一致した。また、この場合にも、以前に得られた対応関係が成立することを確認した。また、数値的に臨界指数の計算を行い、平均場のユニバーサルリティークラスの臨界指数を理論的数値的に確認し、また、Widomの等式の成立を確認した。

(5) 1次元トーラス上の短距離相互作用でランダムネスが無い場合の対応関係

最隣接相互作用を用い、自由境界条件と周期的境界条件で解析を行った。オーダーパラメータを、XYモデルでは、信念伝搬法によって、また、MCMC法で数値的に計算し、位相振動子系では、数値積分により計算した結果、両系で0となった。次に、外場への応答を研究し、臨界指数を両系で数値的に求め、誤差の範囲で一致するという結果を得た。さらに、全位相が揃った状態からの緩和過程を数値的に計算し、時間スケールを適切に選ぶことにより、緩和過程が一致することを確認した。

(6) アミット型相互作用における対応関係

連想記憶型相互作用においては、XYモデルにおいて連続アトラクタが存在し、位相振動子系では、リミットサイクルやカオスが対応すると以前報告していた。連想記憶型相互作用を拡張したアミット型相互作用においても、同様な現象が存在するかを調べた。両系において、ノイズある無しを調べ、記憶解、対称混合解について、その存在と安定性に関して対応関係がある事を確認した。一方、連続アトラクタについては、位相振動子系では、システムサイズを増やすと、実質振動数の組を固定した時には、初期条件を変えても同じ点に収束するが、色々な組を用いると、それに応じて解は1次元多様体上にある別々の固定点に収束することを明らかにした。すなわち、実質振動数の組に応じた固定点があり、それらは、ある1次元多様体上に載っており、その多様体は、XYモデルの1パラメータファミリーの作る多様体と対応している。

(7) 2次元最隣接相互作用における対応関係の研究

古典XYモデルでは、渦の有無にかんするコストリッツ-サウレス転移が存在する。そこで、まず、両系にペアとなる渦の有無を調べたところ、XYモデルでは既知の結果を再現し、位相振動子系でも、同様の相転移があることがわかった。一方、相関関数のべき的減衰については、古典XYモデルでは指数の温度依存性が既存の理論結果と一致する事を確認したが、位相振動子系においては、べき的減衰とは異なる減衰になっていることが示唆される結果が得られた。

<引用文献>

Correspondence between phase oscillator network and classical XY model with the same infinite-range interaction in statics

T. Uezu, T. Kimoto, S. Kiyokawa, and M. Okada

J. Phys. Soc. Jpn. 84, No. 3 (2015) 033001, 1 - 5.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Tomoyuki Kimoto and Tatsuya Uezu	4. 巻 100
2. 論文標題 Correspondence between phase oscillator network and classical XY model with the same random and frustrated interactions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Phys. Rev. E	6. 最初と最後の頁 022213 1-13.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevE.100.022213	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Masaki Kawamura, Kao Hayashi, Tatsuya Uezu, and Masato Okada	4. 巻 99
2. 論文標題 Statistical mechanical evaluation of a spread-spectrum watermarking model with image restoration	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Phys. Rev. E	6. 最初と最後の頁 062132 1-14.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevE.99.062132	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kao Hayashi, Chinami Hashimoto, Tomoyuki Kimoto, and Tatsuya Uezu	4. 巻 87/5
2. 論文標題 Unlearning of Mixed States in the Hopfield Model - Extensive Loading Case -	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of the Physical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 054004 1-16
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7566/JPSJ.87.054004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Risa Yoshida, Tomoyuki Kimoto, and Tatsuya Uezu	4. 巻 86/3
2. 論文標題 Conditions for the Existence and Stability of the Continuous Attractor in the Classical XY Model with an Associative-Memory-Type Interaction	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of the Physical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 034001 1-26
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7566/JPSJ.86.034001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計20件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 林美里
2. 発表標題 最隣接相互作用を有する正方格子上の古典 XY モデルと位相振動子ネットワークの対応関係
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 上江洌達也
2. 発表標題 SK 型相互作用を有する XY モデルと位相振動子ネットワークの対応 - スピングラスオーダーパラメータと低エネルギー状態 -
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 戸田光
2. 発表標題 円周上のメキシカンハット型相互作用と非局所相互作用の場合における古典 XY モデルと位相振動子系の臨界現象の対応関係
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 宮田佳奈
2. 発表標題 Amit 型相互作用を有する XY モデルと位相振動子系の対応関係 -外場への応答 -
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 上江洩達也
2. 発表標題 Correspondence between Phase Oscillator Network and Classical XY Model with the Same Random and Frustrated Interactions
3. 学会等名 27th IUPAP International conference on Statistical Physics (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 上江洩達也
2. 発表標題 SK型相互作用を有するXYモデルと位相振動子ネットワークの対応 - 局所場の自己無撞着方程式 v2
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 宮田佳奈
2. 発表標題 ノイズが印加されたAmit型相互作用を有するXYモデルと位相振動子の対応関係
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 宮田佳奈
2. 発表標題 Amit型相互作用を有するXYモデルと位相振動子の対応関係ー連続アトラクタの安定性と対応する解ー
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 上江洩達也
2. 発表標題 SK型相互作用を有するXYモデルと位相振動子ネットワークの対応 VI、日本物理学会
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 戸田光
2. 発表標題 強磁性及び反強磁性一次元最隣接相互作用を有する古典XYモデルと位相振動子ネットワークの対応関係
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岡本優花
2. 発表標題 一次元最隣接相互作用及び非局所相互作用を有する古典XYモデルと位相振動子ネットワークの対応関係
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 木本智幸
2. 発表標題 SK型相互作用を有するXYモデルと位相振動子ネットワークの対応IV
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 上江洩達也
2. 発表標題 SK型相互作用を有するXYモデルと位相振動子ネットワークの対応V
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 宮田佳奈
2. 発表標題 Ami t型相互作用を有するXYモデルと位相振動子の対応関係ー連続アトラクタと対応する解ー
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 戸田光
2. 発表標題 強磁性及び反強磁性次元最隣接相互作用を有する古典XYモデルと位相振動子ネットワークの対応関係
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 上江洩達也
2. 発表標題 SK型相互作用を有するXYモデルと位相振動子ネットワークの対応III
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 木本智幸
2. 発表標題 SK型相互作用を有するXYモデルと位相振動子ネットワークの対応I
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 上江洵達也
2. 発表標題 SK型相互作用を有するXYモデルと位相振動子ネットワークの対応II
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 上江洵達也
2. 発表標題 無限レンジ相互作用を有する2次元トラス上のXYモデルおよび位相振動子系の対応関係の研究
3. 学会等名 日本物理学会 第72回年次大会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 上江洵達也
2. 発表標題 Correspondence between Phase Oscillator Network and Classical XY Model with the Same Interaction
3. 学会等名 26th IUPAP International conference on Statistical Physics (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	清川 修二 (Kiyokawa Shuji) (20177950)	奈良女子大学・自然科学系・教授 (14602)	
研究分担者	木本 智幸 (Kimoto Tomoyuki) (30259973)	大分工業高等専門学校・電気電子工学科・教授 (57501)	
研究分担者	雑賀 洋平 (Saika Youhei) (40280432)	群馬工業高等専門学校・電子情報工学科・教授 (52301)	
研究協力者	岡本 優花 (Okamoto Yuuka)	奈良女子大学・理学部数物科学科・4回生(2017) (14602)	
研究協力者	林 美里 (Hayashi Misato)	奈良女子大学・理学部数物科学科・4回生(2019) (14602)	
研究協力者	宮田 佳奈 (Miyata Kana)	奈良女子大学・大学院人間文化研究科数物科学専攻・博士前期課程学生(2018-2019) (14602)	
研究協力者	戸田 光 (Toda Hikari)	奈良女子大学・大学院人間文化研究科数物科学専攻・博士前期課程学生(2018-2019) (14602)	