

令和元年6月5日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K12393

研究課題名(和文) グラフ分解に基づく新たな索引構造の開発

研究課題名(英文) New Graph Indexing Structures based on Decomposition

研究代表者

定兼 邦彦 (Sadakane, Kunihiko)

東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授

研究者番号：20323090

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：グラフ分解に基づくネットワークアルゴリズムについて、様々な問題についてのアルゴリズムを与えた。ネットワークの2点間の最大フロー、全点間最大フロー、最小カット、単一始点最短経路、全点間最短経路問題について、グラフの最大3連結成分サイズを用いて時間計算量を評価した。これらの手法は最大3連結成分サイズが小さいグラフについては既存手法よりも高速である。つまり、グラフの最大3連結成分サイズは、ネットワーク問題の難しさの一つのパラメータと考えることができる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

グラフに関する問題を解くアルゴリズムとしては、木分解に基づくアルゴリズムが多く存在するが、それらは木幅が小さい場合しか適用できない。本研究で開発するアルゴリズムは異なる分解に基づくため、木幅が大きいグラフに対しても適用できる。また、木分解と異なり、問題によっては計算量がパラメータの指数ではなく多項式に比例するようになることがある。これにより、多くのグラフに対して実用的なアルゴリズムを開発できるようになることが期待される。

研究成果の概要(英文)：We have developed algorithms for various network problems based on graph decomposition. We evaluated time complexities for s-t max flow, all pairs max flow, minimum cut, single source shortest paths, and all pairs shortest paths, using the size of the largest triconnected components in the graph as a parameter. These algorithms are faster than existing ones if the size of the largest triconnected components is small. This means we can say that the size of the largest triconnected components is a parameter on difficulties of network problems.

研究分野：アルゴリズムとデータ構造

キーワード：ネットワーク問題 グラフ分解

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

グラフ上での最適化問題などを効率的に解く手法の1つに、木分解 (tree decomposition) に基づくものが存在する。これは、グラフ G の節点間の接続関係を表現する木 T によってグラフを表現するもので、多くの研究が存在する。 T の節点はバッグと呼ばれ、各バッグは G の節点の部分集合と対応する。最大バッグのサイズ-1 を G の木幅 (tree width) w と定義する。グラフ上の組み合わせ最適化問題の多くは NP 完全であるが、 w が定数の場合には多項式時間で解ける場合がある。例えば節点数 n のグラフの最大独立集合問題は動的計画法により $O(2^{w+1}n)$ で解ける。つまり木幅が定数だとすると線形時間となる。最大独立集合問題以外にも、支配集合、ハミルトンパス、最大カット、彩色問題など様々な問題に対して木幅が計算量のパラメタとなるアルゴリズムが存在する。また、木幅に類似したパラメタとして、branch-width, clique-width, carving-width などが存在し、これらに基づくグラフの分解やそれを用いた最適化アルゴリズムも多く存在するが、基本的な考え方や性質は木分解と同じである。

木分解に基づくアルゴリズムの問題点の1つは、木幅の計算が NP 完全であるということであり、P = NP の仮定の下では多項式時間では近似でしか求まらないということである。また、別の問題点として、アルゴリズムの計算量が木幅に対して指数的に増加するという点である。例えば、グラフでの最大フロー問題については $O(2^{w+1}n)$ 時間アルゴリズムが存在するが、2重指数が現れるため木幅の大きなグラフに対しては効率的ではない。

応募者は直並列グラフでの最大フロー索引付け問題に対するアルゴリズムについての研究を行った。これは直並列グラフという限定されたクラスに属するグラフでは最大フロー問題を効率的に解くことができるというものである。この研究を発展させ、任意のグラフに対するアルゴリズムを考えている過程で本研究の着想に至った。

2. 研究の目的

グラフの分解アルゴリズムに基づく、組み合わせ最適化問題のアルゴリズムや最短路探索などの索引付け問題のデータ構造を開発する。既存手法では木分解を用い、木幅をパラメタとするアルゴリズムが多いが、最適な木分解を求める問題は NP 完全であるため近似解を用いる必要があった。本研究では異なるグラフ分解アルゴリズムを用いることにより高速に分解を行うことができ、アルゴリズムの高速化が期待できる。また、アルゴリズムの計算量を木幅とは異なるパラメタで評価することで、問題の難しさを違った尺度で評価できるようになる。提案アルゴリズムを実際のグラフに適用し、グラフの特徴を調べる。

3. 研究の方法

木分解とは異なるグラフの分解として、まずは SPQR 木を用いる。グラフを SPQR 木で表現し、それに基づき各種問題に対するアルゴリズムを開発し、その計算量を SPQR 木のパラメタで評価する。まずは最大フローや最短路問題の索引付け問題を扱い、その後は NP 完全問題についても考察する。また、Web グラフなど実際のグラフを SPQR 木で表現した時の木構造やパラメタがどうなるのかを実験的に調べ、どのようなグラフで提案手法が有効かを調べる。また、理論的な課題として、木幅と SPQR 木のパラメタの大小関係を調べる。さらに、その他のグラフ分割に基づく手法も試す。

4. 研究成果

グラフ分解を用いて、動的 DFS 問題に対する効率的なアルゴリズムを開発した。動的 DFS 問題

とは、初めに無向グラフ G とその全域木 T が与えられ、その後には枝の挿入削除・点の挿入削除が行われたときに深さ優先探索(DFS)木を更新するという問題である。この問題に対し $O(\sqrt{nm} \text{ polylog}(n))$ 時間の更新アルゴリズムを与えた (n は点数, m は枝数)。アルゴリズムの作業領域は $(3m+o(m)) \log n + O(m)$ ビットである。既存手法では $O(m \log n)$ ビットを用いていたため、作業領域を大幅に削減できた。このアルゴリズムでは、DFS 木をパスと部分木に分解する手法を用いている。DFS 木の枝が削除された場合に、代わりにどの枝を DFS 木に採用するかを決める必要があるが、その問題は 2 次元の領域探索問題で表現できる。領域探索問題はウェーブレット木と呼ばれるデータ構造を用いることで省空間で効率的に解くことができる。処理時間については、枝の挿入のみが起きる場合については既存手法の方が優れているが、それ以外の場合については提案手法の方が高速である。なお、既存手法にはアルゴリズムに一部間違いがあることを発見し、その修正もしている。作業領域については、更新時間が均し時間の場合は $(2m+o(m)) \log n + O(m)$ ビットに削減できる。更新時間の最悪ケースを抑えるためには $(3m+o(m)) \log n + O(m)$ ビットの領域が必要となる。

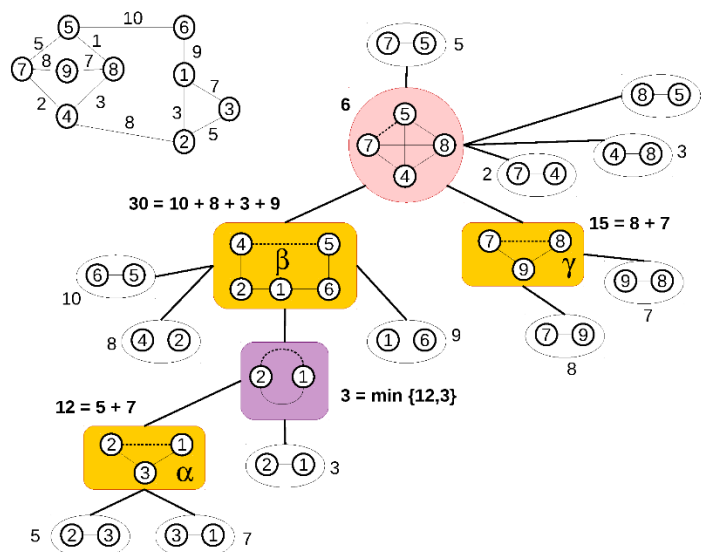


図 1 SPQR 木の例

グラフ分解を用いて、ネットワークでの最大フローを高速に求めるアルゴリズムを開発した。グラフの頂点数を n , 枝数を m とすると、最大フローを求めるこれまでの最速アルゴリズムの時間計算量は $O(nm)$ である [Orlin2013]。本研究では、グラフを SPQR 木を用いて 3 連結成分に分割することにより高速化した。グラフの最大 3 連結成分のサイズ (枝数) を r とすると、最大フローを $O(m+nr)$ 時間で求めることができる。常に $r \leq m$ であるため、このアルゴリズムは最悪の場合でも既存手法と同じ時間であり、グラフが小さい 3 連結成分に分割される場合には既存手法よりも高速に最大フローを求めることができる。上記の手法を発展させ、最大フロー索引化問題に対する高速アルゴリズムを開発した。この問題は、ネットワークが与えられたときに、予め索引を作成しておくことで最大フロー問題をより高速に解く問題である。この問題に対し 2 つの索引を提案した。1 つ目は索引のサイズが線形 $O(m)$ であり、最大フローを求める問い合わせ時間が $O(r^2)$ のものである。また、この索引を用いることにより、最小カット問題も効率的に解くことができる。2 つ目は、索引のサイズが $O(nr)$ であり、問い合わせ時間が $O(\log n)$ のものである。この 2 つには索引サイズと問い合わせ時間のトレードオフがあり、用途によって使い分け

ることができる。さらに、問い合わせ時間は $O(n)$ (逆アッカーマン関数)にすることもできる。

グラフ分解に基づくネットワークアルゴリズムについて、様々な問題についてのアルゴリズムを与えた。ネットワークの2点間の最大フロー、全点間最大フロー、最小カット、単一始点最短路、全点間最短路問題について、グラフの最大3連結成分サイズを用いて時間計算量を評価した。これらの手法は最大3連結成分サイズが小さいグラフについては既存手法よりも高速である。つまり、グラフの最大3連結成分サイズは、ネットワーク問題の難しさの一つのパラメタと考えることができる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 1 件)

Manas Jyoti Kashyop, Tsunehiko Nagayama, Kunihiko Sadakane. Faster algorithms for shortest path and network flow based on graph decomposition, Journal of Graph Algorithms and Applications, 2019. 掲載決定

〔学会発表〕(計 3 件)

Hao-Ting Wei, Wing-Kai Hon, Paul Horn, Chung-Shou Liao, Kunihiko Sadakane. An $O(1)$ -Approximation Algorithm for Dynamic Weighted Vertex Cover with Soft Capacity, Proceedings of APPROX, 27:1-27:14, 2018.

DOI: 10.4230/LIPIcs.APPROX-RANDOM.2018.27

Manas Jyoti Kashyop, Tsunehiko Nagayama, Kunihiko Sadakane. Faster Network Algorithms Based on Graph Decomposition, Proceedings of WALCOM, LNCS 10755, pp. 80-92, 2018.

DOI: 10.1007/978-3-319-75172-6_8

Kengo Nakamura, Kunihiko Sadakane. A Space-Efficient Algorithm for the Dynamic DFS Problem in Undirected Graphs, Proceedings of WALCOM, LNCS 10167, pp. 295-307, 2017.

DOI: 10.1007/978-3-319-53925-6_23

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等 <https://researchmap.jp/sada/>

6. 研究組織

(1)研究分担者 なし

(2)研究協力者

研究協力者氏名：中村 健吾

ローマ字氏名： Nakamura Kengo

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。