様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　９ 月　　９ 日現在

機関番号：１４２０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ１２３９９

研究課題名（和文）連続時間ゲーム論的確率論の戦略と制御

研究課題名（英文）strategy and control in continuous-time games

研究代表者
竹村　彰通（TAKEMURA, AKIMICHI）

滋賀大学・データサイエンス学部・教授

研究者番号：１０１７１６７０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：ゲーム論的確率論は、Shafer と Vovk が 2001年の著書 "Probability and Finance: It's Only a Game!", Wiley,で提唱した新しい確率論であり、測度論を仮定せず、二人のプレーヤーの間の賭けゲームの帰結として確率論全体の体系が構成できることが示された。本研究では、連続時間ゲームの枠組みの中で、重複対数法則の精緻化や、ベイズ的な賭け戦略の有効性についての研究成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
ゲーム論的確率論は賭けゲームに基づく理論であるために、数学的な証明には具体的な賭け戦略を考察することとなる。このため、標準的な測度論的証明とかなり異なるものとなり、証明がより具体的になるとともに、確率論の古典的な法則についても新たな知見が得られる。また数理ファイナンスにおける議論とも共通点があり、数理ファイナンスの観点からも興味のある結果が得られる。本研究でも、例えば重複対数法則の精緻化において、既存の測度論的確率論の証明とは全く異なる視点が得られた。

研究成果の概要（英文）：The game-theoretic probability established by Shafer and Vovk in their book "Probability and Finance: It's Only a Game!" constructs the whole framework of probability theory based on a betting game between two players without using the measure theory. In this study, we mainly considered continuous time games and obtained results on refinements of the law of the iterated logarithm and the efficiency of Bayesian betting strategies.

研究分野：情報学

キーワード：確率論　ベイズ戦略　重複対数法則

１．研究開始当初の背景

ゲーム論的確率論は Shafer and Vovk の 2001 年の著書 “Probability and Finance, It’s Only a Game!” によって基礎づけられた確率論の体系であり、その後日本においても竹内啓、公文雅之、竹村の共同研究によってさまざまな結果が得られていた。その後、本研究の開始当時には、研究分担者の宮部賢志や竹村研究室のメンバーによって、測度論的確率論の枠組みでは得られないような研究が進められている状況であった。

２．研究の目的

本研究では、ゲーム論的確率論の手法により、測度論的確率におけるさまざまな結果に対して新しい証明を与えることや、賭けゲームの戦略の考察により既存の結果より強い結果を証明することを目指した。

３．研究の方法

研究の方法としては、本研究開始以前から竹村によって用いられていたベイズ的な賭け戦略の挙動を更に詳しく調べることが一つの有力な手段であった。またランダムネスの理論を専門とする宮部賢志により、ランダムネスの分野で用いられているテクニックをゲーム論的確率論に応用することにより、ゲームのプレイヤーの一人である Reality の戦略の性質を研究することとした。

４．研究成果

研究の結果として最大の成果は Erdos-Feller-Kolmogorov-Petrowsky 型(以下 EFKP 型という)の重複対数の法則について、これまで測度論的確率論では知られていなかった非常に強い結果を証明したことである。この結果は、長い査読を経て、確率論における世界のトップジャーナルである The Annals of Probability に掲載された。研究代表者と分担者はすでに本研究以前からゲーム確率論の枠組みにおける重複対数の法則の証明については研究しており引用文献[1]においては 2 次以上のモーメントに対するヘッジを用いることができる場合の重複対数の法則についての結果を得ていた。

重複対数の法則は通常の教科書では独立同一分布の設定で述べられる。すなわち $X_1, X_2, \ldots$ を独立同一分布に従う確率変数列とし、$\mathrm{E}(X_n)=0$，$\mathrm{Var}(X_n)=\sigma^2<\infty$ とし、$S_n = X_1^2+\cdots+X_n^2$ とおく時、通常の重複対数の法則は

$$\mathrm{limsup}_n \frac{S_n}{\sqrt{2n\sigma^2 \log\log n}} = 1$$

の形で述べられる。これは比の形である。S_n の挙動についてさらに強い結果を得るには

$$S_n - \sqrt{2n\sigma^2 \log\log n} > 0$$

となる事象が確率 1 で有限回起こるのか無限回起こるのかを調べることが一つの方法である。この方向での定式化の最も強い形が EFKP 型の重複対数の法則である。以下 $\log_k x = \log\log \ldots \log x$を log を$k$回繰り返した k 重の合成関数を表すものとする。EFKP 型の重複対数の法則においては、例えば

- $S_n - \sigma\sqrt{n}\sqrt{2\log_2 n + 3\log_3 n} > 0$ は確率 1 で無限回起きるが
- $S_n - \sigma\sqrt{n}\sqrt{2\log_2 n + 4\log_3 n} > 0$ は確率 1 で有限回しか起きない

といった形の結果が示される。より正確には $S_n - \sigma\sqrt{n}\psi(n) > 0$ が確率 1 で無限回起きるか起き

ないかは $I(\psi)=\int_1^\infty \frac{1}{\lambda}\,\psi(\lambda)e^{-\frac{\psi(\lambda)^2}{2}}d\lambda$ が発散するか収束するかによることがわかっており

- $I(\psi)=\infty$ ならば $S_n-\sigma\sqrt{n}\psi(n)>0$ は確率 1 で無限回起き
- $I(\psi)<\infty$ ならば $S_n-\sigma\sqrt{n}\psi(n)>0$ は確率 1 で有限回しか起きない

ことが知られている。

以上は独立同一分布の結果について述べたものであるが、以上の結果をゲーム論的確率論の枠組みで考えるとすると、測度論的確率論とはやや異なる視点が得られる。まず、賭けゲームの公平性の本質はマルチンゲール性にあるからS_n としてマルチンゲールを考えることが自然である。この時、できればマルチンゲールのみ、すなわち条件つき期待値が 0 であることのみを仮定したい。すなわち条件つき分散を用いない結果を導きたいと考える。このためには上の結果にある σ^2を

$$A_n=X_1^2+\cdots+X_n^2$$

で置き換えればよい。S_n を σ ではなく$\sqrt{A_n}$ と比較するのは、統計学で言えば t 統計量を用いることにあたる。確率論の文脈では自己規準化過程（self-normalized process)とよばれる。

以上のような設定のもので 1）独立性を仮定せずマルチンゲール性のみを仮定する､2）条件つき分散を用いず自己規準化過程についての結果を定式化する、という二つの設定のもとで、[1]で EFKP 型の重複対数の法則の証明に成功した。これは新しくまた深い結果である。結果はゲーム論にも測度論的にも述べることができて、測度論的な枠組みでももちろん成立する結果であるが、我々のゲーム論的証明でさえかなり長いため、測度論的な証明はおそらくさらに長い証明になると考えられる。ゲーム論的な証明を測度論的な証明に置き換えることは難しいため、我々の結果に対する測度論的な証明を与えること自体も残された課題である。

本研究では、重複対数法則の証明の他に、ベイズ戦略の資金過程の挙動についても著しい結果を得た。研究代表者のゲーム論的確率の研究の中で、ベイズ戦略は重要なテーマであった。すでに 2008 年には引用文献[2]にあげた論文で、コイン投げゲームにおけるベイズ戦略の有効性についての結果を得ていた。その後もベイズ戦略の資金過程の挙動についていくつかの結果を得たが、それらの中でベイズ戦略の事前分布の設定と大数法則の収束速度の間に一定の数学的な関係があることが示唆されていた。つまり、事前分布の原点周りの集積度が大きければ大きいほど、大数法則の収束速度が速いらしいという予想が成り立っていた。この結果を定式化し証明を与えたのが[2]の成果である。ここでは事前分布の原点周りの集積度と大数法則の収束速度の間に 1 対 1 の関係があることを証明し､その対応の具体的な式も与えることに成功した。[2]の研究は、順序としては[1]の研究中にその証明の簡略化を目指して開始されたものであったが、結果としては独立な成果として定式化と証明を与えることができた。

＜引用文献＞

[1] Kenshi Miyabe and Akimichi Takemura (2013). The law of the iterated logarithm in game-theoretic probability with quadratic and stronger hedges. *Stochastic Processes and their Applications*, Vol.123, pp.3132-3152. doi:10.1016/j.spa.2013.03.018.

[2] Masayuki Kumon, Akimichi Takemura and Kei Takeuchi (2008). Capital process and optimality properties of a Bayesian skeptic in coin-tossing games. *Stochastic*

Analysis and Applications, Vol.26, No.6, 1161-1180.
doi:10.1080/07362990802405646.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　2　件）

[1] Takeyuki Sasai, Kenshi Miyabe and Akimichi Takemura (2019). "Erdos-Feller-Kolmogorov-Petrowsky law of the iterated logarithm for self-normalized martingales: a game-theoretic approach", *The Annals of Probability*, Vol.47, No.2, pp.1136-1161. doi:10.1214/18-AOP1281.

[2] Ryosuke Sato, Kenshi Miyabe and Akimichi Takemura (2018). "Relation between the rate of convergence of strong law of large numbers and the rate of concentration of Bayesian prior in game-theoretic probability". *Stochastic Processes and their Applications*, Vol.128, pp.1466-1484. doi:10.1016/j.spa.2017.07.014.

〔学会発表〕（計　0　件）

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）
○取得状況（計　0　件）

〔その他〕
ホームページ等:
http://www.akimichitakemura.com/athp/

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：宮部 賢志

ローマ字氏名：Miyabe Kenshi

所属研究機関名：明治大学

部局名：理工学部

職名：専任准教授

研究者番号（8 桁）：00583866

(2)研究協力者
なし

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。