

令和元年6月19日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K13743

研究課題名(和文)非可換代数多様体のモジュライ空間

研究課題名(英文)Moduli of noncommutative algebraic varieties

研究代表者

植田 一石 (Ueda, Kazushi)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：60432465

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：Hirzebruch曲面の非可換変形をパラメトライズする3つの代数的スタックを導入し、それらが自然に双有理同値であることを示した。また、スキーム上のVan den Berghの意味の非可換射影直線束の導来圏が、Orlov型の半直交分解を持つことを示した。さらに、滑らかな射影多様体 X と Y が導来同値である時に、代数多様体のGrothendieck環の中で $[X]-[Y]$ がアファイン直線のクラス L の幕で消えるかという問題を提出し、この問題が肯定的に解ける例と否定的に解ける例を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非可換代数幾何学は代数幾何学と比べるとずっと若い分野であるが、数学の様々な分野と関わり、今後の発展が期待される重要な分野である。非可換代数多様体の分類はこの分野の最も基本的な問題の一つであるが、これに対するモジュライ理論的なアプローチは我々以外にはまだ殆ど研究されていない。また、代数多様体の導来圏がどの程度もとの多様体の情報を持っているかは、ミラー対称性や双有理幾何との関係もあって近年大いに興味を持たれているが、我々の提出した問題と具体例はこの方向に重要な進歩をもたらした。

研究成果の概要(英文)：We introduced three algebraic stacks parametrizing noncommutative deformations of Hirzebruch surfaces, and proved that they are naturally birational to each other. We also gave Orlov-type semiorthogonal decompositions of the derived categories of noncommutative P_1 -bundles over schemes in the sense of Van den Bergh. In addition, we formulated a problem asking if the class $[X]-[Y]$ for derived-equivalent smooth projective varieties X and Y in the Grothendieck ring of varieties is annihilated by some power of the class L of the affine line, and gave examples of both affirmative and negative answers to this problem.

研究分野：幾何学

キーワード：非可換代数幾何学 モジュライ空間

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

可換環論は代数幾何学の局所理論を与えるが、これを非可換環論に置き換えることによって非可換代数幾何学を得ることはできない。素イデアルの集合に Zariski 位相を入れたものに環の層を乗せて、それを貼り合わせるという構成が非可換環論に対しては機能しないからである。

局所的なものを貼り合わせることを諦めて、最初から大域的なものを扱うというアプローチが M. Artin and J. J. Zhang, *Noncommutative projective schemes*, Adv. Math. 109 (1994), no. 2, 223-287 で導入された。ここでは、射影多様体上の接続層のなすアーベル圏を座標環上の次数付き加群のなすアーベル圏の商圏として記述する Serre の定理を、可換とは限らない次数付き環に拡張することによって、非可換射影多様体上の接続層の概念が定義された。彼らの意味の非可換射影多様体は、位相やその上の局所環の層などの付加構造付きの点集合や、環の圏から集合の圏への函手ではなく、その上の接続層という概念のみが定義された抽象的な記号に過ぎない。しかし、これによって可換とは限らない次数付き環の研究に、幾何学的な議論を持ち込むことが可能になった。

この Artin らの意味の非可換射影多様体の研究における中心的な問題の一つは、M. Artin, *Some problems on three-dimensional graded domains*, Representation theory and algebraic geometry (Waltham, MA, 1995), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 238, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 1-19 において提唱された、Gelfand-Kirillov 次元が 3 であるような次数環が定める非可換射影多様体は、非可換射影平面か、可換な曲線上の非可換射影直線束か、中心上有限であるかのいずれかになるという予想である。非可換射影平面は M. Artin, J. Tate, and M. Van den Bergh, *Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves*, The Grothendieck Festschrift, Vol. 1, 33-85, Progr. Math. 86 (1990) において分類され、可換なスキーム上の非可換射影直線束の理論は M. Van den Bergh, *Non-commutative P^1 -bundles over commutative schemes*, Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012), no. 12, 6279-6313 で与えられた。

2. 研究の目的

数学において新しい対象が導入された時には、その中で特に良い性質を持つものを抜き出して、その同型類を分類する事が問題になる。代数幾何学においては、単に同型類を集合論的に分類するだけではなく、同型類をパラメトライズしている空間に再び代数的な構造を入れて、代数多様体(あるいはその拡張である代数的スタック)として取り扱う事が重要である。本研究の目的は、このモジュライの理論を非可換射影多様体に拡張することである。

3. 研究の方法

非可換射影多様体が完備強例外列を持つ時、その非可換射影多様体上の接続層のなす圏は、例外列を構成する例外対象の直和として得られる対象の自己準同型環上の有限生成加群の圏と導来同値になる事が知られている。この自己準同型環は適当な籠の道代数を関係式と呼ばれる両側イデアルで割ったものとして表示されるが、Abdelgadir(協力者)、大川(分担者)および植田(代表者)によって、籠を固定して関係式を動かすことによって非可換射影多様体のモジュライ空間を構成するというアイデアが導入された。本研究ではこのアイデアを軸に、非可換 Hirzebruch 多様体を中心とする非可換射影多様体のモジュライ空間の研究に取り組んだ。

4. 研究成果

毛利(分担者)、大川(分担者)および植田(代表者)は、Hirzebruch 曲面の非可換変形をパラメトライズする 3 つの代数的スタックを導入し、それらが自然に双有理同値であることを示した。第 1 のスタックは射影直線上の Van den Bergh の意味の階数 2 の局所自由層両側加群のモジュライ空間であり、第 2 のスタックは Abdelgadir-大川-植田の意味の籠の関係式のモジュライ空間であり、第 3 のスタックは楕円曲線とその上の 3 つの直線束のモジュライ空間である。また、スキーム上の Van den Bergh の意味の非可換射影直線束の導来圏が、Orlov 型の半直交分解を持つことを示した。これは非可換射影直線束が、底空間のコピー 2 つを圏論的に貼り合わせたものになっていることを示している。更に、射影直線上の階数 2 の層両側加群の明示的な分類を行った。また、導来同値としての(特殊)McKay 対応の非可換化についても議論した。これらの結果はプレプリントとして [arXiv:1903.06457](https://arxiv.org/abs/1903.06457) で公表されている。

大川および植田は、名古屋大学多元数理科学研究科の伊藤敦および韓国高等科学院の三浦真人と共同で、代数多様体の Grothendieck 環の構造に関する研究を行った。 G_2 型の Grassmann 多様体はちょうど 2 個あるが、これらの上の適当な階数 2 の同変ベクトル束の大域切断の零点と

して、3次元 Calabi-Yau 多様体 X と Y が定義される。これらの Calabi-Yau 多様体はそれぞれ Pfaff 多様体の中の Calabi-Yau 多様体 X' と Grassmann 多様体の中の Calabi-Yau 多様体 Y' に変形することが知られており、さらに X' と Y' は代数多様体の Grothendieck 環の中である関係式を満たすことが Borisov や Martin によって証明されていたが、我々は X と Y が代数多様体の Grothendieck 環の中で関係式 $([X]-[Y])L=0$ を満たすことを発見した。ここで、 L は代数多様体の Grothendieck 環におけるアファイン直線のクラスである。さらに、 X' と Y' が導来同値であることが Borisov-Caldararu や Kuznetsov によって知られていたが、我々は X と Y が導来同値であると予想するとともに、滑らかな射影多様体 V と W が導来同値である時に、 $[V]-[W]$ が L の冪で消えるかという問題を提出した。同じ問題は同時期に独立に Kuznetsov と Shinder によっても提出されており、この分野における重要な問題であると考えられる。 X' と Y' の導来同値性は程なくして Kuznetsov によって証明され、それを踏まえて、植田は 8 次元のフロップを用いる新たな証明を与えた。さらに、伊藤、三浦、大川および植田によって、非常に一般の次数 12 の K3 曲面に対しては上の問題に対する答えが肯定的であることと、次元が 2 以上の一般の Abel 多様体に対しては上の問題に対する答えは否定的であることが証明された。

植田は、名古屋大学の石井亮及びマドリード自治大学の Alvaro Nolla de Celis と共同で、ダイマー模型への群作用の研究を行った。特に、群の作用に関して対称性を持つダイマー模型という概念を定式化し、 $GL(2, \mathbb{Z})$ の任意の有限部分群 H と、 H の作用に関して対称性を持つ任意の格子多角形 に対し、 H の自然な作用に関して対称性を持つダイマー模型 G で、 を特性多角形に持ち、しかも整合性条件を満たすものが存在することを示した。これによって、トーリック特異点ではなく、しかも商特異点でもない 3 次元の Gorenstein 特異点の Van den Bergh の意味での非可換クレバント解消の例の無限系列を作ることができる。

また、本研究費の支援を受けて、2017 年の 9 月 25 日から 9 月 29 日に毛利らによって京都大学数理解析研究所で国際研究集会「Noncommutative Algebraic Geometry and Related Topics」が開催された。そこで行われた最新の研究成果の発表と、それを受けた活発な研究交流は、本研究の遂行および当該分野の発展に大いに役立った。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 (計 7 件)

(1) A. Ito, M. Miura, S. Okawa, K. Ueda, The class of the affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring: Via G_2 -Grassmannians, J. Algebraic Geom. 28 (2019), 245-250.
<https://doi.org/10.1090/jag/731>

(2) K. Hashimoto, K. Ueda, Reconstruction of general elliptic K3 surfaces from their Gromov-Hausdorff limits, Proc. Amer. Math. Soc. 147 (2019), 1963-1969.
<https://doi.org/10.1090/proc/14428>

(3) I. Mori, K. Ueyama, The classification of 3-dimensional Noetherian cubic Calabi-Yau algebras, J. Pure Appl. Algebra 223 (2019), 1946-1965.
<https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2018.08.009>

(4) K. Ueda, G_2 -Grassmannians and derived equivalences, manuscripta math. (2018).
<https://doi.org/10.1007/s00229-018-1090-4>

(5) K. Hashimoto, H. Lee, K. Ueda, On a certain generalization of triangle singularities, manuscripta math. (2017) 153: 35.
<https://doi.org/10.1007/s00229-016-0876-5>

(6) I. Mori, S. P. Smith, The classification of 3-Calabi-Yau algebras with 3 generators and 3 quadratic relations, Math. Z. (2017) 287: 215.
<https://doi.org/10.1007/s00209-016-1824-5>

(7) S. Okawa, Surfaces of globally F-regular type are of Fano type, Tohoku Math. J. (2) Volume 69, Number 1 (2017), 35-42.
<https://doi.org/10.2748/tmj/1493172126>

〔学会発表〕 (計 26 件)

- (1) K. Ueda, A-infinity algebras and singularities, The 6th Franco - Japanese - Vietnamese symposium on singularities, Khanh Hoa University, Nha Trang, Vietnam, 2018年9月16日,
- (2) K. Ueda, Moduli of non-commutative Hirzebruch surfaces, Noncommutative Algebraic Geometry and Related Topics, 京都大学数理解析研究所, 2017年9月26日
- (3) K. Ueda, The class of the affine line in the Grothendieck ring of varieties, 代数的層のモジュライの研究とその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2017年2月3日.
- (4) K. Ueda, The class of the affine line in the Grothendieck ring of varieties, The 4th Franco-Japanese-Vietnamese Singularities, Chambéry, France, 2016年11月8日.
- (5) K. Ueda, The class of the affine line in the Grothendieck ring of varieties, Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry 3, Moscow, Russia, 2016年9月15日.

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/index.html>

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：大川 新之介

ローマ字氏名：(OKAWA, shinnosuke)

所属研究機関名：大阪大学

部局名：大学院理学研究科

職名：准教授

研究者番号：60646909

(2)研究分担者氏名：毛利 出

ローマ字氏名：(MORI, izuru)

所属研究機関名：静岡大学

部局名：理学部

職名：教授

研究者番号：50436903

(3)研究協力者

研究協力者氏名：Tarig Abdelgadir

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。