様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

KAKENHI 科研費

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２年　６月　４日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ１３７４６

研究課題名（和文）非可換代数幾何学と一般化された複素構造の研究

研究課題名（英文）Studies on noncommutative algebraic geometry and generalized complex geometry

研究代表者
大川　新之介（Okawa, Shinnosuke）

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号：６０６４６９０９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：非可換射影平面および非可換2次曲面に対応する非可換代数のクラスを拡張し、任意の非可換del Pezzo曲面に対応する非可換代数のクラスを定義した。また、可換代数幾何的データとの対応についても、既知の結果の拡張に部分的に成功した。
Orbifoldに対するHKR同型について予想を立てると共に、興味深い具体例において検証を行った。これに触発され、一般化された複素構造の定義をorbifoldに拡張した。
非可換重み付き射影空間P(1,1,1,2)を与える非可換代数の族と、それに対応したポアッソン幾何を(可換な)P(1,1,1,2)上に発見した。これは非可換2次del Pezzoの反標準線型系と関わる。

研究成果の学術的意義や社会的意義
非可換射影幾何学、一般化された複素幾何のどちらにとっても、非可換/一般化されたdel Pezzo曲面は最も重要で基本的な例である。非可換射影幾何学においては射影平面と2次曲面の場合を除いて基礎づけに不満があったが、それを補う形で一般の非可換del Pezzo曲面を定義するようなAS正則代数のクラスを定義することができた。また、orbifoldの非可換変形に関する理解が進み、思った以上に豊かな現象が起きていることがわかった。さらに、Poisson幾何との対応を参照することで、高次元の新たなAS正則代数のクラスが発見できた。これらは今後研究対象となるべきものである。

研究成果の概要（英文）：We generalized the classes of noncommutative algebras corresponding to noncommutative projective planes and noncommutative quadrics so that any noncommutative del Pezzo surface correspond to one of these classes of algebras. Also we partially generalized the correspondence between those algebras and commutative algebro-geometric data.
We gave a conjectural HKR isomorphism for Deligne-Mumford stacks, and confirmed it in several interesting examples. Inspired by this, we defined the notion of generalized complex orbifold.
We found a class of noncommutative graded algebras which yield noncommutative weighted projective 3-spaces P(1,1,1,2), and found the corresponding Poisson geometry on the commutative P(1,1,1,2). These are related to the geometry of noncommutative/Poisson del Pezzo surfaces of degree 2.

研究分野：代数幾何学

キーワード：非可換代数幾何学　AS正則代数　一般化された複素構造

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

本研究を開始する以前より、報告者は非可換代数幾何学に関する研究を行っていた。ここで言う非可換代数幾何学とは、代数多様体上の連接層からなる圏の一般化であるところの abel 圏ないし enhanced 三角圏を幾何学的対象と捉えて研究する分野のことである。その一環として、報告者は非可換射影幾何学を非可換代数幾何学の立場から捉え直し、一般化する研究を行っていた。ここで非可換射影幾何学とは、Artin-Schelter 正則代数と呼ばれるある種の次数付き代数(の一般化)を研究する分野である。代数幾何学における最も基本的な対象である射影空間は、代数的には多項式環に標準的な次数づけを入れたものである。そこで、多項式環と同様の homology 代数的な幾つかの良い性質を持つ必ずしも可換ではない次数つき代数のクラスを定義し、それを射影空間の非可換版と捉えて研究しようという提案が Artin と Schelter によって 80 年代に行われた。これが、今日、Artin-Schelter 正則代数と呼ばれる代数のクラスである。

一方、微分幾何学的構造である複素構造と symplectic 構造を同時に一般化するような幾何構造である「一般化された複素構造」が 2000 年代に Hitchin, Gualtieri によって提案・研究された。そして、一般化された複素構造と非可換射影幾何学、より広く非可換代数幾何学には様々な類似が存在することが認識されていた。その最たるものは、変形理論の一致である。非特異な複素代数多様体 X があったとき、その非可換代数多様体としての変形(すなわち連接層の圏 coh X の変形)と、X が定める概複素構造が定める一般化された複素構造の変形が、同じ次数付き Lie 代数で記述されるということがわかっていた。

２．研究の目的

以上の観察に基づき、非可換代数幾何学と一般化された複素幾何学の関係解明につとめると共に、類似を通じて双方に示唆される予想を検証することが目的であった。

３．研究の方法

共同研究に関しては、メールによる議論、Skype、あるいは直接会っての研究打ち合わせなどの方法によって進めた。

４．研究成果

非可換射影幾何学と一般化された複素構造のそれぞれにおいて最も prototypical で重要な対象が、非可換 del Pezzo 曲面/一般化された del Pezzo 曲面である。従って、これらについての理解を深める研究が重要であるという認識を早い段階から持っていた。非可換 del Pezzo 曲面のうち、非可換射影平面と非可換 2 次曲面に関しては多くの先行研究により十分満足の行く基礎理論があったものの、一般の非可換 del Pezzo 曲面に関してはそれに相当するものが存在しない状況であった。この状況に鑑み、一般の非可換 del Pezzo 曲面の基礎理論を確立するというプロジェクトに取り組んだ。これに関する成果を説明する。

非可換射影平面と非可換 2 次曲面は、それぞれ AS 正則 3 次元 quadratic/cubic Z 代数によって与えられる。ここで集合 I に対する体 k 上の I 代数とは、k 線型圏 C および、その対象の集合 Obj C と集合 I との全単射の組のことである。I が整数の集合 Z のとき、Z 代数となる。Z 代数 C の右加群圏 Mod C とは C^{op}から k-vector space の圏への k 線型関手圏のことである。ねじれ加群の全体がなす Serre 部分圏による局所化を Qmod C と書く。

Mod C が AS Gorenstein 条件(可換局所環の Gorenstein 条件の類似)を満たし、さらに単純加群が特定の形の射影分解を持つ時、C は AS 正則 3 次元 quadratic/cubic Z 代数と呼ばれる。ここでどのような形の射影分解を指定するかに応じて、quadratic/cubic の違いが出る。AS 正則 3 次元 quadratic (resp. cubic)Z 代数の Qmod と圏同値な k 線型圏を非可換射影平面(非可換 2 次曲面)と呼ぶ。C を射影平面上の直線束の圏とすると Qmod C は射影平面上の準連接層の圏になり、一般の C に対してはその平坦変形が得られる。非可換 2 次曲面についても同様である。

射影平面と 2 次曲面は del Pezzo 曲面の例であるが、del Pezzo 曲面の変形類は他に 8 つある。それらに対しても AS 正則代数のクラスを適切に定義し、非可換変形を Qmod として記述したいというのが目標であったが、これを達成することができた。その鍵となるのが三角圏の幾何学的螺旋(geometric helix)である。これは非常に大雑把に言うと三角圏のある種の生成系であり、しかも hom complex が 0 次に集中しているようなものである。ここでは定義は割愛するが、我々が見出した以下の定理が肝である。

定理：非特異射影代数曲面の導来圏が幾何学的螺旋を持つとき、それを適当な添字集合 I によって I 代数と見たものは、単純加群が幾何学的螺旋の変形類だけに依存する特定の形の射影分解を持つような AS 正則 I 代数になる。

この定理の鍵は Calabi-Yau 3 性である。曲面の標準束の全空間が Calabi-Yau 3-fold になるということから、幾何学的螺旋を全空間に然るべき意味で引き戻して得られるところの rolled-up helix algebra が CY3 代数となる。AS Gorenstein 条件や単純加群の射影分解の具体的な形などは、Bocklandt, Van den Bergh による CY3 代数の構造定理からただちに得られる。

一方、任意の del Pezzo 曲面の導来圏には幾何学的螺旋が(無数に)存在することがわかっている。射影平面や 2 次曲面の場合にある特定の幾何学的螺旋を選ぶと、そこから上記の定理の手続きで得られる AS 正則 Z 代数のクラスがちょうど 3 次元 quadratic/cubic Z 代数になる。こうして、del Pezzo 曲面の各変形族ごとに対応して AS 正則 I 代数のクラスが定まることになる。

なお、変形類を固定しても幾何学的螺旋の選び方は無数にあるため、それに応じて異なる AS 正則Ｉ代数のクラスが定まる。それらは互いに変異によって対応すると期待しているが、まだ課題として残っている。

3 次元 quadratic/cubic Z 代数は、種数１の代数曲線とその上の直線束の集まりからなるデータで然るべき条件を満たすものと一対一対応することが証明されている(Artin-Tate-Van den Bergh, Bondal-Polishchuk, Van den Bergh)。この結果についても、三角圏の手法に基づいたより自然な解釈を与えることができた。さらに、その解釈を上記のより一般の AS 正則 Z 代数の場合に適用することで、対応する幾何学的データの定義を与えることに部分的に成功した。

アイディアは、三角圏の「点対象」のモジュライ空間とその上の普遍族の組を考えることである。ただしここで「部分的に」と書いたのは、考える点対象のうち然るべき安定性条件を満たすものだけを考える必要があり、その安定性条件としてどのようなものを選ぶべきかという問題が残ってしまっているからである。3 次元 quadratic/cubic Z 代数の場合には先行研究を解釈することにより、どのような安定性条件を考えるとうまくいくかということが後づけでわかる。しかし、その安定性条件を選ぶことの概念的な理由がまだつけられておらず、そのため、一般の場合への拡張ができていない。幾つかアイディアはあるのであるが、期間内に解決できなかったことは大変残念である。今後も研究を続けたい。

以上の結果は Tarig Abdelgadir、植田一石両氏との共同研究であり、MFO report(No. 24/2018)に概説を書いた(2018)。また、京都大学で集中講義を行う機会も得た(2019)。

一般化された複素多様体からどのようにして非可換代数多様体(圏)ないし AS 正則代数を構成するか、という問題は中心的である。これをテーマにした研究集会が 2016 年に Oxford で行われ、報告者も参加した。Gualtieri の研究発表は、Auroux-Katzarkov-Orlov による非可換射影平面のミラーが(彼に言わせると)ミラーではなくまさにそのような圏を与えていると思える、という主張であったが、あまり明瞭な印象は得られなかった。一方、2019 年に同氏が阪大で講演を行った際には、generalized Kahler manifold をある種の複素幾何的データ+alpha に翻訳し、その応用として一般化された射影平面から AS 正則代数を定義できる見込みであるということであった。発表の時点ではその前段階の toy model の話で、射影直線の twisted homogeneous coordinate ring を得ることまでしかできていないということであったが、この方針はかなり有望であるように感じられた。残念ながら本研究期間内には論文は発表されなかったが、もしも射影平面の場合が本当にうまくいくのであれば、同じ手法で我々が導入した AS 正則代数を一般化された del Pezzo 曲面から構成するという大変興味深い問題に取り組むことができるはずである。

一方、佐野太郎氏と報告者の安定点付き曲線のモジュライスタックの非可換剛性の研究をきっかけに、Deligne-Mumford stack に対する Hochschild-Kostant-Rosenberg 同型を考えることになった。一般に標数 0 の非特異代数多様体に対し、その Hochschild cohomology を代数多様体上の多重ベクトル場の層の cohomology の直和に表すことができ、HKR 同型と呼ばれている。連接層の圏の変形理論は Hochschild cohomology で記述されるため、それを調べる上で極めて有用な手法である。一方、非特異 DM stack の Hochschild cohomology の場合、HKR 同型を考えると、inertia stack の非自明な成分(twisted sector と呼ばれる)からの寄与があると予想されている。これは、導来代数幾何の意味での loop space が inertia stack の shifted tangent bundle と同型になるというより抽象的な予想の形式的な帰結であり、後者は DM stack が有限群による大域商の場合に証明されている(Arinkin-Caldararu-Hablicsek)。

この予想(正確な主張は arxiv:1412.7060 に書いた。)の確からしさを具体的な DM stack で検証し、実際に twisted sector からの非自明な寄与がある興味深い例が多く存在することを確かめた。最も簡単な例は重み付き射影 stack P(1,1,2)であり、2 次 Hochschild cohomology に orbifold point(0,0,1)に対応する twisted sector からの１次元の寄与があることがわかる。2 次 Hochschild cohomology は coh P(1,1,2)の変形の接空間なので、twisted sector からの寄与に対応して coh P(1,1,2)の変形が存在するはずである。これが何なのかしばらくわからなかったのであるが、実は 2 次曲面の coh への変形がそれであることがわかった。これは一見当たり前に見えるが、DM stack P(1,1,2)を通常の代数幾何学の意味で 2 次曲面に変形することはできない(さらにややこしいことに、P(1,1,2)の coarse moduli を 2 次曲面に変形することは可能なのであるが)ので、少なくとも報告者にとっては驚くべき発見であった。実際、この圏の変形は非可換次数付き代数の変形によって得られた。

この例に限らず DM stack の非可換変形は興味深い例が様々に存在するため、一般化された複素構造についてもその orbifold 版を考え、特にその変形理論を考えるべきであると考えた。Orbifold 上の一般化された複素構造の定義は自然なものを与えることができた。１つの方法は、代数幾何における stack の定義を真似て、可微分多様体の圏上の亜群に値を取る圏であって局所同相(etale 射のアナロジー)なアトラスを持つものを考えることである(この定義は Kai Behrend の仕事による)。代数幾何学の場合と同様に tangent bundle や cotangent bundle が定義できるので、その直和の自己同型として一般化された概複素構造が定義できる。これに基づいて、例えば一般化された orbifold P(1,1,2)が一般化された複素多様体としての 2 次曲面に変形されるということをどう考えるべきか、という問は興味深い(変形の定義から考える必要がある)。

研究分担者の後藤竜司氏と共にある種の一般化された 3 次元射影空間の変形複体の計算に取り組んだ(これは対応する非可換射影空間の直線加群のモジュライに関する報告者の別な共同研究で行った計算と関係がある)。また、3 次元重み付き射影空間 P(1,1,1,2)のポアッソン構造とある種の非可換 P(1,1,1,2)とが対応することを発見した。これについて説明する。

次数 2 の del Pezzo 曲面の反標準線型系は射影平面への次数 2 の射を与える。これにより、次数 2 の del Pezzo 曲面は重み付き射影空間 P(1,1,1,2)の次数 4 の超曲面となる。これを非可換 del Pezzo 曲面に拡張する方法がしばらくわからなかったのであるが、非可換 P(1,1,2)を定める AS 正則 Z 代数を次数 1 の元で中心拡大して得られる代数がこれらを与えるということがわかった。非可換 P(1,1,2)を定める AS 正則 Z 代数には次数 4 の正規化正則元が存在し、これを中心拡大に持ち上げて得られる次数 4 の元の``零点集合”が 2 次の非可換 del Pezzo 曲面を与えるわけである。これは非可換 3 次曲面の反標準因子の幾何学に関する le Bruyn-Smith-Van den Bergh の仕事の類似になっている。

以上の構成の semi-classical limit を分担者の後藤氏と議論し、orbifold P(1,1,1,2)の上に対応する holomorphic Poisson structure が存在することを発見した。Orbifold 上で正則 Poisson 幾何学を考えることが有用であることを明らかにしたという点で画期的であると考えている。なお、次数 1 の del Pezzo 曲面についても同様の考察を行い、その場合は P(1,1,2,3)が現れることがわかった。

このように色々と興味深い発見があったが、研究期間内に完成した形で発表できなかったものが多かった。今後引き続き研究を続け、完成させる予定である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Atsushi Ito, Makoto Miura, Shinnosuke Okawa, Kazushi Ueda	4．巻 28
2．論文標題 The class of the affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring: via G2-Grassmannians	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Journal of Algebraic Geometry	6．最初と最後の頁 245--250
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1090/jag/731	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Shinnosuke Okawa	4．巻 69(1)
2．論文標題 Surfaces of globally F-regular type are of Fano type	5．発行年 2017年
3．雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6．最初と最後の頁 35-42
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） -	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Okawa Shinnosuke	4．巻 -
2．論文標題 An example of birationally inequivalent projective symplectic varieties which are D-equivalent and L-equivalent	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1007/s00209-020-02519-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計24件（うち招待講演　24件／うち国際学会　21件）

1．発表者名 Shinnosuke Okawa
2．発表標題 Defining noncommutative del Pezzo surfaces as AS-regular I-algebras
3．学会等名 MFO workshop: Interactions between Algebraic Geometry and Noncommutative Algebra（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

１．発表者名
Shinnosuke Okawa

２．発表標題
On the definition of noncommutative del Pezzo surfaces

３．学会等名
Positivity in Algebraic Geometry（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Shinnosuke Okawa

２．発表標題
On the definition of noncommutative del Pezzo surfaces

３．学会等名
HOMOLOGICAL METHODS IN ALGEBRA AND GEOMETRY II（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Shinnosuke Okawa

２．発表標題
On the definition of noncommutative del Pezzo surfaces

３．学会等名
Differential, Algebraic and Topological Methods in Complex Algebraic Geometry（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Shinnosuke Okawa

２．発表標題
Noncommutative del Pezzo surfaces as AS-regular I-algebras

３．学会等名
Noncommutative deformations and moduli spaces（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2018年

1．発表者名
Shinnosuke Okawa

2．発表標題
Derived equivalence and Grothendieck ring of varieties

3．学会等名
Seoul Seminar on Algebraic Geometry-4（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2017年

1．発表者名
Shinnosuke Okawa

2．発表標題
Derived Equivalence and Grothendieck Ring of Varieties

3．学会等名
Higher Dimensional Algebraic Geometry（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2017年

1．発表者名
Shinnosuke Okawa

2．発表標題
Noncommutative del Pezzo surfaces and their moduli spaces

3．学会等名
Classification and Moduli theory of algebraic varieties（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2017年

1．発表者名
Shinnosuke Okawa

2．発表標題
Noncommutative rigidity of the moduli stack of stable pointed curves

3．学会等名
非可換代数幾何学とその周辺（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2017年

１．発表者名
Shinnosuke Okawa

２．発表標題
Noncommutative del Pezzo surfaces and their moduli space

３．学会等名
第２３回複素幾何シンポジウム（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2017年

１．発表者名
Shinnosuke Okawa

２．発表標題
On the definition of noncommutative del Pezzo surfaces

３．学会等名
Higher dimensional algebraic geometry（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Shinnosuke Okawa

２．発表標題
Noncommutative Hirzebruch surfaces

３．学会等名
School and Workshop on Homological Methods in Algebra and Geometry（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2016年

１．発表者名
大川新之介

２．発表標題
Compact moduli of marked noncommutative del Pezzo surfaces

３．学会等名
代数学シンポジウム（招待講演）

４．発表年
2016年

１．発表者名 Shinnosuke Okawa
２．発表標題 Noncommutative Hirzebruch surfaces
３．学会等名 Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry 3（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2016年

１．発表者名 Shinnosuke Okawa
２．発表標題 Compact moduli of marked noncommutative del Pezzo surfaces
３．学会等名 Non-commutative, derived and homotopical methods in geometry（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2016年

１．発表者名 Shinnosuke Okawa
２．発表標題 Derived equivalence and Grothendieck ring of varieties
３．学会等名 Workshop on spherical varieties（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2016年

１．発表者名 Shinnosuke Okawa
２．発表標題 Minimal model theory for Brauer pairs
３．学会等名 Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry IV（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2016年

１．発表者名
大川新之介

２．発表標題
On derived equivalence and Grothendieck ring of varieties

３．学会等名
都の西北代数幾何学シンポジウム（招待講演）

４．発表年
2016年

１．発表者名
大川新之介

２．発表標題
Noncommutative projective planes and their moduli spaces

３．学会等名
静岡代数学セミナー（招待講演）

４．発表年
2016年

１．発表者名
Shinnosuke Okawa

２．発表標題
Compact moduli of marked noncommutative del Pezzo surfaces

３．学会等名
Generalized Geometry and Noncommutative Algebra（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2016年

１．発表者名
Shinnosuke Okawa

２．発表標題
On noncommutative Hirzebruch surfaces

３．学会等名
Non-commutative crepant resolutions, Ulrich Modules and generalizations of the Mckay correspondence（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2016年

１．発表者名
Shinnosuke Okawa

２．発表標題
Deformations of semiorthogonal decompositions and application to symmetric products of curves

３．学会等名
Interaction Between Algebraic Geometry and QFT（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
Shinnosuke Okawa

２．発表標題
Exceptional collections on the Hirzebruch surface of degree 2

３．学会等名
Derived categories and geometry of algebraic varieties（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2020年

１．発表者名
Shinnosuke Okawa

２．発表標題
Moduli space of semiorthogonal decompositions

３．学会等名
Shafarevich Seminar at Steklov Institute of Mathematics（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~okawa/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	後藤　竜司 (Goto Ryushi) (30252571)	大阪大学・理学研究科・教授 (14401)	