

令和 2 年 6 月 29 日現在

機関番号：15401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2019

課題番号：16K13748

研究課題名（和文）変形を用いたChow群の研究

研究課題名（英文）Research of Chow group using deformation

研究代表者

木村 俊一（Kimura, Shun-ichi）

広島大学・理学研究科・教授

研究者番号：10284150

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の大きな成果として、代数多様体のモチーフの有限次元性の証明が完成したことが挙げられる。それを達成したのは本研究グループではなくチューリッヒ大学数学研究所の Joseph Ayoub氏であったことは残念であったが、本研究がそこで大きな役割を果たしたことは間違いない。また、本研究から派生した重要な数学を2つあげると（1）Infinitesimal Motivic Chow Series の有理性の理論と（2）有限体係数多項式でのCollatz 予想に関するLagarias Q関数の代数性の理論があげられる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数学的対象を、そのモチビクゼータというプリズムを通して見る、という視点の重要性について本研究は明らかにしたと思う。代数多様体のChow群をMumford は幾何的視点から「無限次元的」と表現したが、代数的な視点からモチビクゼータをとることで「有限次元的」な振る舞いをするを本研究は予測し、またその有限次元性を仮定すると多くの大予想がそこから従うことも確かめた。本研究期間中に有限次元性予想は Ayoub に証明され、その意味では一つの大きな役割を終えたが、モチビクゼータの有限次元性や代数性などの視点は新しい分野で応用の窓口を広げている。

研究成果の概要（英文）：The biggest news related to this research is the proof of Finite Dimensionality of motives of algebraic varieties. Unfortunately for us, the final step is done by Joseph Ayoub, but undoubtedly our research contributed to this big result. We also have two new mathematics spawned out of our research: (1) Infinitesimal Motivic Chow Series and (2) Algebraicity of Lagarias Q function in the context of Collatz conjecture for the polynomial rings over finite fields.

研究分野：代数幾何

キーワード：モチーフ モチビクゼータ 有限次元性 Trace Formula

1. 研究開始当初の背景

研究代表者が提案した「モチーフの有限次元性予想」が Bloch 予想などモチーフ理論の大予想をいくつも証明する鍵になることはよく知られており、またアーベル多様体など有限次元性が成り立つことが知られている重要な例があった。研究代表者は 2006 年の論文でアーベル多様体のモチーフの有限次元性を証明し、さらに一般の代数多様体に対してモチーフの有限次元性を証明するべく研究を続けていたが、正直研究は膠着状態に入っていた。一方で、モチーフの有限次元性の研究から派生した研究テーマがあり、それまでのモチーフ理論の枠組みを大きくこえる可能性が見え始めていた。

特にモチビク Chow 級数の研究。モチーフの有限次元性とは、Chow モチーフの K 環の圏で代数多様体の対称積の Chow モチーフの形式和が有理関数になるという予想であるが、代数多様体の対称積とは Chow 多様体のうち 0 次元サイクルという特別なケースと考えることができるので、高次元サイクルの Chow 多様体の形式和を考えたもの、すなわちモチビク Chow 級数も有理関数となることが期待されるのか、という一見自然に見える問題の一般化が考えられる。これに関して、研究開始時には、次のことがわかっていた。

- (1) モチーフの有限次元性予想の直接的な一般化を考えた場合、射影平面の 1 次元サイクルの例で、有理的にならないものが見つかった。(Elizondo-Kimura)
- (2) 一方、 A^1 -homotopy という関係式を入れた場合、モチビク Chow 級数が有理的になる例が数多く見つめられた。特に、関係式なしでは有理的にならない例であった射影平面を含むトーリック多様体においては、モチビク Chow 級数が、 A^1 -homotopy relation のもとで有理的になることが証明されていた。(Elizondo-Kimura2)
- (3) その一方で、射影平面の 10 個の generic な点でのプロウアップ、という有理代数多様体の 1 次元サイクルのモチビク Chow 級数が、 A^1 -homotopy relation のもとでも有理的にならないことがわかった。モチーフの有限次元性は(つまり 0 次元サイクルのモチビク Chow 級数は)全ての代数多様体に対して有理的になることが期待されるのとは対照的な振る舞いである。
- (4) さらに、射影平面の 3 点プロウアップの 1 次元サイクルについての A^1 -homotopy relation のもとでのモチビク Chow 級数は常に有理的になるが、その有理関数が 3 点の配置によって(正確には、3 点が一直線上に並ぶか、それともそうでないかによって)違う形をしていることが示された(Elizondo-Kimura2)。射影平面の 3 点プロウアップのモチーフは、どの 3 点でプロウアップしようが同じであり、これはモチビク Chow 級数が代数多様体のモチーフのみでは決まらない例となった。モチビク Chow 級数の有理性が代数多様体の何らかのコホモロジーを反映しているのではないかと考える場合、これまでは知られていないコホモロジーを反映している可能性を示唆する結果である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、モチーフの有限次元性予想から派生した研究テーマを追求することである。すなわち

- (1) モチビク Chow 級数の有理性について、さらに研究を進める。
- (2) 代数多様体のモチーフの有限次元性とは、Weil 予想の精密化と見ることができるとは、代数多様体以外の脈絡でモチビクゼータの有理性の問題が重要な意味を持つ場合があるかを調べる。

3. 研究の方法

研究目的(1)に関して、共同研究者の Javier Elizondo 教授がモチビク Chow 級数のコホモロジー版である Euler Chow 級数の専門家であり、連絡を取りつつ研究を進めた。

研究目的(2)に関して、代数幾何以外の様々な研究集会に参加して情報収集につとめた。

また、岡山熊本広島代数学シンポジウムを毎年年度末に開き、情報の発信と収集につとめた。

4. 研究成果

モチビク Chow 級数の有理性について、単なる A^1 -homotopy relation でなく、そのベキ乗を法とした relation で有理的になるか(無限小変形モチビク Chow 級数の有理性)という質問が Totaro からあり、それについての partial な解答を与えた。すなわち、トーリック多様体の余次元 1 のサイクルに関するモチビク Chow 級数については A^1 -homotopy relation の 2 乗を法とした無限小変形モチビク Chow 級数の有理性を証明した。また、射影多様体の余次元 1 のサイクルの無限小変形モチビク Chow 級数の、 A^1 -homotopy relation の 3 乗以上を法としたいくつかの例において、モチビク Chow 級数が有理的になることを確かめた。

代数多様体以外の圏での類似例として、研究年度終了直前に、数論的力学系と言うべき Collatz 予想に関するモチビク関数のアナロジーというべき Lagarias Q 関数に関して、整数論でなく有限体上の多項式環上での類似で興味深い現象が起こることを発見した。

自然数に対して Collatz 予想が成立することと、自然数の Lagarias Q 関数の値が分母を 3 とする既約分数になることは同値であるが(特に Lagarias Q 関数は Collatz 予想を含む力学系の振る舞いについての深い情報を含んでいるわけだが)、有限体 F_2 上の形式的べき級数環上で Lagarias Q 関数を考えることができ、べき級数 f に対して $Q(f)$ が有理関数になるための必要十分条件が、 f が有理関数であることである、と証明した。また、 f がある種の代数的なべき級数であるとき、 $Q(f)$ も代数的なべき級数になる例を発見した。この成果は現在出版準備中である。なお、直接本研究グループによる成果ではないが、モチーフの有限次元性の研究で大きな進展があったことをここで報告しておくべきだと考える。チューリッヒの Joseph Ayoub が標数 0 の場合にモチーフの有限次元性の証明に成功し、その成果を報告するベルリンフンボルト大学で開かれた研究集会に研究代表者も招かれた。本研究グループが最後のステップを進められなかったことは残念であるが、人類の知見への大きな貢献であると考えます。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件／うち国際共著 2件／うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Shimada, Ichiro	4. 巻 71
2. 論文標題 On an Enriques surface associated with a quartic Hessian surface	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Canad. J. Math	6. 最初と最後の頁 213-246
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4153/CJM-2018-022-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Takahashi, Nobuyoshi	4. 巻 73
2. 論文標題 Quandles associated to Galois covers of arithmetic schemes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Kyushu J. Math	6. 最初と最後の頁 145-164
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2206/kyushujm.73.145	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Ishii, Akira, ;Nakamura, Iku	4. 巻 70
2. 論文標題 Extended McKay correspondence for quotient surface singularities	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Quarterly Journal of Math	6. 最初と最後の頁 395-408
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/qmath/hay047	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shun-ichi Kimura, Mao Sheng, Mingwei Zhang	4. 巻 22
2. 論文標題 Numerical boundedness on rational equivalences of zero cycles on algebraic varieties with trivial CH_0	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Asian J. Math.	6. 最初と最後の頁 569-576
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Shimada, Ichiro	4. 巻 315
2. 論文標題 The automorphism groups of certain singular K3 surfaces and an Enriques surface	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Progr. Math.	6. 最初と最後の頁 297-343
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-29959-4_12	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Degtyarev, Alex; Shimada, Ichiro	4. 巻 68
2. 論文標題 On the topology of projective subspaces in complex Fermat varieties	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 JK. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 975-996
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/06830975	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Shimada, Ichiro	4. 巻 25
2. 論文標題 Automorphisms of super singular K3 surfaces and Salem polynomials	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Exp. Math.	6. 最初と最後の頁 389-398
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/10586458.2015.1073641	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shimada, Ichiro; Shioda, Tetsuji	4. 巻 153
2. 論文標題 On a smooth quartic surface containing 56 lines which is isomorphic as a K3 surface to the Fermat quartic	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Manuscripta Mathematica	6. 最初と最後の頁 279-297
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00229-016-0886-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shimada, Ichiro	4. 巻 -
2. 論文標題 Holes of the Leech lattice and the projective models of K3 surfaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takahashi, Nobuyoshi	4. 巻 21
2. 論文標題 Quandle varieties, generalized symmetric spaces and \mathbb{A}^1 -spaces	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Transofrm. Groups	6. 最初と最後の頁 555-576
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00031-015-9351-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計10件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 9件)

1. 発表者名 Shun-ichi Kimura
2. 発表標題 Rationality of Motivic Chow Series modulo infinitesimal \mathbb{A}^1 -homotopy
3. 学会等名 The first congress of Algebra Geometry of Mexico (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Ichiro Shimada
2. 発表標題 On an Enriques surface associated with a quartic Hessian surface
3. 学会等名 Algebraic Geometry Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ichiro Shimada
2. 発表標題 On an Enriques surface associated with a quartic Hessian surface
3. 学会等名 Topology of Singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ichiro Shimada
2. 発表標題 Connected components of the moduli of elliptic K3 surfaces
3. 学会等名 The 10th Arithmetic and Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Ichiro Shimada
2. 発表標題 Connected components of the moduli of elliptic K3 surfaces
3. 学会等名 The 4th Franco-Japanese-Vietnamese Singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Ichiro Shimada
2. 発表標題 A smooth surface containing 56 lines
3. 学会等名 Algebra, geometry and topology of singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Akira Ishii
2. 発表標題 Introduction to the McKay correspondence and Artin-Verdier theory
3. 学会等名 Non-commutative crepant resolutions, Ulrich modules and generalizations of the McKay correspondence (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Akira Ishii
2. 発表標題 Dimer models with group actions
3. 学会等名 Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry 3 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 石井亮
2. 発表標題 G-constellations and the maximal resolution of a quotient surface singularity
3. 学会等名 非可換代数幾何学の大域的問題とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Akira Ishii
2. 発表標題 G-constellations and the maximal resolution of a quotient surface singularity
3. 学会等名 Moduli spaces of sheaves and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 木村俊一	4. 発行年 2018年
2. 出版社 東京図書	5. 総ページ数 322
3. 書名 基幹講座 数学 線型代数 (基幹講座数学)	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	島田 伊知朗 (Shimada Ichiro) (10235616)	広島大学・理学研究科・教授 (15401)	
研究分担者	石井 亮 (Ishii Akira) (10252420)	名古屋大学・多元数理科学研究科・教授 (13901)	
研究分担者	高橋 宣能 (Takahashi Nobuyoshi) (60301298)	広島大学・理学研究科・准教授 (15401)	