

令和元年6月18日現在

機関番号：15401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K13749

研究課題名（和文）正標数の代数多様体に現れる組合せ論的構造の研究

研究課題名（英文）Combinatorial structure on algebraic varieties in positive characteristics

研究代表者

島田 伊知朗（Shimada, Ichiro）

広島大学・理学研究科・教授

研究者番号：10235616

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,300,000円

研究成果の概要（和文）：様々な代数多様体に現れる組み合わせ論的構造を調べた。特に、フェルマー多様体、なかでも正標数のエルミート多様体に関して多くの興味深い知見を得た。この過程において、いくつかの組み合わせ論的アルゴリズムを高速化し計算機に実装した。さらにこれらの組み合わせ論的アルゴリズムを用いて、いくつかのK3曲面およびエンリケス曲面の幾何学的性質（例えば自己同型群）を決定することができた。またリーチ格子の幾何学的構造に関するデータを整備した。これも今後の代数多様体の組み合わせ論観点からの研究に役立つことが期待される。

研究成果の学術的意義や社会的意義

格子や符号といった組み合わせ論的な数学的对象は、安全で高速なデジタル通信を支える上で重要な役割を果たしており、良い格子、良い符号、良い組み合わせ論的对象を見つけることは数学の重要な課題の一つである。特に、対称性の高い特別な代数多様体の幾何学からは興味深い組み合わせ論的構造が得られることが多い。本研究においては、様々な代数多様体に現れる興味深い組み合わせ論的構造を調べた。

研究成果の概要（英文）：We investigated various algebraic varieties from combinatorial point of view, and observed many interesting facts. During the investigation, we improved several algorithms for combinatorial calculations, and implemented them in our computers. Thanks to these algorithms, we have succeeded in probing geometric properties of some K3 and Enriques surfaces, and in particular, determined their automorphism groups. We also made huge data about the Leech lattice. We hope this data will be helpful in future investigation of algebraic varieties from combinatorial point of view.

研究分野：代数幾何学

キーワード：格子 符号 計算機アルゴリズム

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

誤り訂正符号の例において端的に示されているように、よい性質をもつ組合せ論的構造の発見は計算機科学への応用において重要である。興味深い組合せ論的構造の多くは、例外的、あるいは散発的な現象であるかのように見えるが、このような組合せ論的構造を、正標数の代数幾何学において観察される各種の「病的現象」と関連させて考えることにより、その構造の存在する理由の幾何学的側面があきらかになると期待できる。しかしながら、病的な代数多様体が与えられても、そこから興味深い組合せ論的構造を抽出するための一般的なレシピはまだ存在しない。

### 2. 研究の目的

正標数の体上で定義された代数多様体から、複素代数多様体上には見られない興味深い組合せ論構造を構成できる事がしばしばある。例えば、非常によりパラメータを持つ代数幾何符号が有限体上で定義された代数曲線の有理点から構成される。本研究の目的は、正標数の代数多様体を用いて定義される様々な種類の興味深い組合せ論的構造を計算機を援用して大規模に探索し、正標数の代数多様体特有のいわゆる「病的現象」との関連を明らかにすることである。

### 3. 研究の方法

標数  $p$  における  $q+1$  次フェルマー超曲面( $q$  は  $p$  のベキ)から出発して、これから様々な代数幾何学的操作により得られる代数多様体を考察の対象とする。正標数特有の性質をもつ具体的な代数多様体を選び、その幾何構造を詳しく調べ、そこから各種の組合せ論的構造を抽出する。十分速いアルゴリズムを開発し、高速度のプログラミング言語を用いて実装した計算機プログラムを使って多くの具体例に関し実験を行う。この部分においては、できるだけ汎用的なアルゴリズムを書くことにより、組み合わせ論および計算代数幾何学の他の問題への応用も目指す。

### 4. 研究成果

- (1)  $K3$  曲面の格子理論的データを作成するときに用いた計算機プログラムを高速化し、複数の CPU を使った分散計算を行うことで、階数 64 の extremal 格子の新しい例を作ること成功した。
- (2)  $PSU(6,4)$  と  $\cdot 222$  との同型は標数 2 の 4 次元フェルマー 3 次超曲面に含まれる平面とリーチ格子内の正四面体の集合との対応関係から得られるということが、Edge により 1970 年に suggest された。この対応関係を書き下し、 $\cdot 222$  と  $PSU(6,4)$  との同型を明示的に記述した。さらに階数 22 の圧着格子の自己同型群を計算した。
- (3) 標数 3 のフェルマー 4 次曲面は超特異  $K3$  曲面である。この曲面上の 112 本の直線の中から  $6A_4$  型の特異ファイバーと zero section のなすコンフィギュレーションを全て列挙し、レベル 4 の楕円モジュラー曲面との関連を調べ、この楕円モジュラー曲面を標数 3 で還元した時に自己同型群がどのように変化するかを決定した。
- (4) 標数 0 のフェルマー 4 次曲面は特異  $K3$  曲面である。この曲面が、フェルマー 4 次曲面とは異なる非特異 4 次曲面としても実現できることを示し、この非特異 4 次曲面の自己同型群、正標数への還元、などを調べた。
- (5)  $p$  進整数環上の格子の discriminant 形式の自己同型をもとの格子の自己同型に近似的に持ち上げることにより、spinor norm を計算し、与えられた格子の spinor genus の個数を求めるプログラムを書いた。ここでいう「近似的」とは  $p$  進位相での意味である。応用として、組み合わせ論的データを固定した楕円  $K3$  曲面のモジュライの連結成分を決定した。
- (6) リーチ格子の holes に関する Borcherds, Conway, Parker, Queen, Sloane の分類結果を用いて、 $K3$  曲面の自己同型群を法とした偏極の集合について、ある有界性を effective に示した。この過程において、Borcherds, Conway, Parker, Queen, Sloane の分類を計算機を用いて再確認し、いくつかの shallow holes と Golay 符号の関係を発見した。
- (7) 階数 10 の unimodular な双曲的偶格子の中のある有限多面体を用いて、4 変数 3 次同次多項式の Hessian 曲面から得られるエンリケス曲面の自己同型群を、組み合わせ群論的に計算した。
- (8) 整数係数ホッジ予想と関連して、標数 0 の偶次元のフェルマー多様体に含まれる中間次元の線形部分空間の位相クラスの生成する部分加群が中間次元のコホモロジー群の中で primitive かどうかを調べた。正標数の体上で定義されたある 0 次元スキームの長さをグレブナー基底を用いて計算することで primitivity を判定する手法を開発した。

## 5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 15 件）

Ichiro Shimada. On an Enriques surface associated with a quartic Hessian surface. *Canad. J. Math.* 査読有り, 71 (2019), no. 1, 213-246. 10.4153/CJM-2018-022-7

Ichiro Shimada. Connected components of the moduli of elliptic K3 surfaces. *Michigan Math. J.* 査読有り, 67 (2018), no. 3, 511-559. doi:10.1307/mmj/1528941621.

Ichiro Shimada. On Edge's correspondence associated with  $\cdot 222$ . *Eur. J. Math.* 査読有り, 4 (2018), no. 1, 399-412. 10.1007/s40879-017-0183-z.

Ichiro Shimada. An even extremal lattice of rank 64. *J. Number Theory*, 査読有り, 185 (2018), 1-15. 10.1016/j.jnt.2017.10.028.

Takayuki Okuda. Geodesics of Riemannian symmetric spaces included in reflective submanifolds. *Contemporary perspectives in differential geometry and its related fields*, 21-32, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018. 査読有り, 10.1142/9789813220911\_0002

Shun-Ichi Kimura, Mao Sheng, Mingwei Zhang. Numerical boundedness on rational equivalences of zero cycles on algebraic varieties with trivial  $CH_0$ . *Asian J. Math.* 22 (2018), no. 3, 569-576. 査読有り, 10.4310/AJM.2018.v22.n3.a9

Ichiro Shimada. Holes of the Leech lattice and the projective models of K3 surfaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 査読有り, 163 (2017), no. 1, 125-143. 10.1017/S030500411600075X

Ichiro Shimada, Tetsuji Shioda. On a smooth quartic surface containing 56 lines which is isomorphic as a K3 surface to the Fermat quartic. *Manuscripta Math.* 査読有り, 153 (2017), no. 1-2, 279-297. 10.1007/s00229-016-0886-3

Takayuki Okuda. Abundance of nilpotent orbits in real semisimple Lie algebras. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 24 (2017), no. 3, 399-430. [http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/journal/abstract\\_e/jms240304\\_e.html](http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/journal/abstract_e/jms240304_e.html)

Ichiro Shimada. The automorphism groups of certain singular K3 surfaces and an Enriques surface. *K3 surfaces and their moduli*, 297-343, *Progr. Math.*, 査読有り, 315, Birkhäuser/Springer, [Cham], 2016.

Maciej Bocheński, Piotr Jastrzębski, Takayuki Okuda, Aleksy Tralle. Proper  $SL(2, \mathbb{R})$ -actions on homogeneous spaces. *Internat. J. Math.* 27 (2016), no. 13, 1650106, 10 pp. 査読有り, 10.1142/S0129167X16501068

Masatake Hirao, Takayuki Okuda, Masanori Sawa. Some remarks on cubature formulas with linear operators. *J. Math. Soc. Japan* 68 (2016), no. 2, 711-735. 査読有り, 10.2969/jmsj/06820711

Takayuki Okuda. Homogeneous space with non-virtually abelian discontinuous groups but without any proper  $SL(2, \mathbb{R})$ -action. *Internat. J. Math.* 27 (2016), no. 3, 1650018, 7 pp. 査読有り, 10.1142/S0129167X1650018X

Takayuki Okuda, Wei-Hsuan Yu. A new relative bound for equiangular lines and nonexistence of tight spherical designs of harmonic index 4. *European J. Combin.* 53 (2016), 96-103. 査読有り, 10.1016/j.ejc.2015.11.003

〔学会発表〕（計 17 件）

Ichiro Shimada. The automorphism groups of Enriques surfaces, Seminar talk, February 21, 2019, Vietnam National University of Science, Hanoi, Vietnam

Ichiro Shimada. Enriques involutions on singular K3 surfaces of small discriminants (joint work with Davide Cesare Veniani), Arithmetic and Algebraic Geometry 2019, January 21, 2019, The University of Tokyo

Ichiro Shimada. The elliptic modular surface of level 4 and its reduction modulo 3, Algebraic Geometry in Positive Characteristic and Related Topics, December 20, 2018, The University of Tokyo

Ichiro Shimada. The elliptic modular surface of level 4 and its reduction modulo 3, Working Workshop on Calabi-Yau Varieties and Related Topics, August 10, 2018, Gakushuin University

Ichiro Shimada. An even extremal lattice of rank 64, 組合せ論セミナー, December 22, 2016, 東北大学情報科学研究科 Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

Ichiro Shimada. An Enriques involution of the Fermat quartic surface in characteristic 3, K3 surfaces and Related Topics, December 21, 2017, Nagoya University

Ichiro Shimada. Rational double points on complex Enriques surfaces, Geometry and Representation Theory Seminar, 25 September, 2017, Queen's University, Kingston, Canada

Ichiro Shimada. Rational double points on complex Enriques surfaces, Workshop on Calabi-Yau manifolds: Arithmetics, Geometry and Physics, 08 August, 2017, Gakushuin University

Ichiro Shimada. Automorphisms of K3 surfaces and Enriques surfaces, Hakodate workshop on arithmetic geometry 2017, 29 May, 2017, Hakodate

Ichiro Shimada. On an Enriques surface associated with a quartic Hessian surface, Oberseminar Algebraische und Arithmetische Geometrie, 04 May, 2017, Leibniz Universit"at Hannover

Ichiro Shimada. On an Enriques surface associated with a quartic Hessian surface, "Algebraic Geometry Conference", 29 Mar, 2017, Haeundae, Busan

Ichiro Shimada. On an Enriques surface associated with a quartic Hessian surface, "Topology of Singularities", 21 Feb, 2017, Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics, Hanoi

Ichiro Shimada. Connected components of the moduli of elliptic K3 surfaces, "The 10th Arithmetic and Algebraic Geometry", 14 Dec, 2016, The University of Tokyo

Ichiro Shimada. Connected components of the moduli of elliptic K3 surfaces, "The 4th Franco-Japanese-Vietnamese Singularities", 09 Nov, 2016, University Savoie Mont Blanc, Chambéry

Ichiro Shimada. A smooth quartic surface containing 56 lines, "Algebra, geometry and topology of singularities", 13 May, 2016, Galatasaray University, Istanbul

Ichiro Shimada. Computer-aided calculations in the study of K3 surfaces, Colloquium talk, 17 March, 2016, Vietnam National University, Hanoi

Shun-ichi Kimura, Rationality of Motivic Chow Series modulo infinitesimal  $A^1$ -homotopy. The first Congress of Algebraic Geometry of Mexico, 2016年10月、Casa Mathematica Oaxaca (メキシコ)

〔図書〕 (計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：木村 俊一  
ローマ字氏名：Shunichi Kimura  
所属研究機関名：広島大学  
部局名：大学院理学研究科  
職名：教授  
研究者番号（8桁）：10284150

研究分担者氏名：奥田 隆幸  
ローマ字氏名：Takayuki Okuda  
所属研究機関名：広島大学  
部局名：大学院理学研究科  
職名：准教授  
研究者番号（8桁）：40725131

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名：  
ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。