

令和 2 年 5 月 21 日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2019

課題番号：16K13754

研究課題名(和文) ゲージ理論に関連する結び目と3次元多様体の不変量と量子トポロジー

研究課題名(英文) Quantum topology and invariants of knots and 3-manifolds related to gauge theory

研究代表者

大槻 知忠 (Ohtsuki, Tomotada)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：50223871

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：筆者は、7交点以下の双曲結び目に対して、Kashaev 不変量の漸近展開を精密に計算し、これらの結び目に対して、体積予想が証明した。8の字結び目を整数係数手術して得られる3次元双曲多様体に対して3次元多様体の体積予想が成立することを筆者は証明した。また、漸近展開の準古典極限の項には Reidemeister torion が現れることが観察され、いくつかの例に対して筆者はそれを証明した。筆者は、各年度に数理解析研究所において研究集会「Intelligence of Low-dimensional Topology」を開催した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

1970年代にはじまった双曲幾何の研究と1980年代にはじまった量子トポロジーの研究は、それぞれ別々に発展してきたが、1999年に発見された体積予想はそれらを結びつける重要な予想である。体積予想は、数理解析的には、Chern-Simons 経路積分に対して無限次元の鞍点法を形式的に適用することによって導かれ、その摂動展開には双曲体積や Reidemeister torsion が現れる、筆者は、いくつかの結び目と3次元多様体に対して、体積予想を証明した。

研究成果の概要(英文)：The author calculated the asymptotic expansion of the Kashaev invariant for hyperbolic knots with up to 7 crossings, and proved the volume conjecture for these knots. Further, the author proved the volume conjecture for hyperbolic 3-manifolds obtained by integral surgery along the figure-eight knot. Furthermore, the author observed that the Reidemeister torsion appears in the semi-classical part of the asymptotic expansion of the quantum invariant, and proved that for some 3-manifolds.

The author held the workshop "Intelligence of Low-dimensional Topology" at RIMS in each year.

研究分野：位相幾何学

キーワード：結び目 3次元多様体 不変量

1. 研究開始当初の背景

3次元の位相幾何学において、1980年代以来、Chern-Simons 理論にもとづいて膨大な数の不変量(量子不変量)が発見され、不変量の研究、すなわち、結び目の集合と3次元多様体の集合の研究という新しい研究領域がもたらされた。1990年代に、結び目の量子不変量は Kontsevich 不変量に統一され、筆者等によって3次元多様体の摂動的な不変量や LMO 不変量が導入されたが、結び目や3次元多様体の分類問題の観点から、量子不変量とそれに関連する不変量の研究が重要であるとおもわれる。また、幾何構造による3次元多様体の分類理論が近年完成し、その観点から、量子不変量と双曲幾何の関係性を記述する体積予想の研究も重要であるとおもわれる。また、3次元トポロジーに現われる不変量の圏化の観点から、4次元トポロジーやゲージ理論との関連の研究も重要であるとおもわれる。

2. 研究の目的

3次元多様体の量子不変量、摂動的な不変量、LMO 不変量や結び目の量子不変量、Kontsevich 不変量について、双曲幾何等の関連する話題にも留意して、研究をすすめて、この分野の研究を進展させることが、本研究の目的であった。それらの不変量は、数理解析的には、Chern-Simons 経路積分を用いて表される。双曲幾何との関連の観点から体積予想の研究が重要であると筆者は考えているが、体積予想は、数理解析的には、Chern-Simons 経路積分に対して無限次元の鞍点法を形式的に適用することによって導かれ、その摂動展開には双曲体積や Reidemeister ねじれが現れる。一方、4次元トポロジーにおいて、1980年代以来、ゲージ理論を用いて、4次元多様体の Donaldson 不変量が導入された。3次元多様体を境界としてもつ4次元多様体の Donaldson 不変量が値をとるべき加群として、3次元多様体の Floer ホモロジーが定義される。Casson 不変量の圏化が Floer ホモロジーである。Casson 不変量は LMO 不変量の1次の項と等価であり、ゲージ理論との関連も期待される。それらの不変量や双曲幾何との関連を研究することが重要であると筆者は考えた。

3. 研究の方法

双曲幾何と量子トポロジーを結びつける関係として「体積予想」が発見された。結び目の体積予想は Kashaev の予想を進展させる形で1999年に村上斉-村上順により定式化され、3次元多様体の体積予想(Chen-Yang 予想)は2016年に Chen-Yang により定式化された。体積予想は、量子不変量のある種の極限に双曲体積が現われることを主張する。筆者は Kashaev 不変量の漸近展開をいくつかの双曲結び目について具体的に計算することをめざした。Chern-Simons 経路積分の摂動展開が示唆しているように、Kashaev 不変量の漸近展開の最初の項は双曲体積で与えられることが予想されており(体積予想) その次の項(準古典極限の項)は Reidemeister ねじれが与えることが予想される。筆者は、それらの場合についてその予想を証明することをめざした。また、近年、3次元多様体の体積予想が定式化されており、筆者は、いくつかの閉3次元双曲多様体について、その定式化に基づいてその量子不変量の漸近挙動を具体的に計算することをめざした。

また、この分野の研究を今後さらに発展させるために、筆者は、各年度に、数理解析研究所において研究集会「Intelligence of Low-dimensional Topology」を開催することを計画した。

4. 研究成果

結び目の Kashaev 不変量と双曲体積を関連づける体積予想は、量子トポロジーと双曲幾何をむすびつける懸案の予想であり、最近15年間世界的にこの分野の中心的な話題となってきた重要な予想である。筆者は、7交点以下の双曲結び目に対して、Kashaev 不変量の漸近展開を精密に計算し、その最初の項に双曲体積が現われることを証明した。これは、この結び目に対して、体積予想が証明されたことを意味する。筆者は、この論文を学術誌に投稿し、出版された。また、3次元多様体の量子不変量の漸近展開に双曲体積が現われることを主張する「3次元多様体の体積予想」も近年定式化されており、8の字結び目を整数係数手術して得られる3次元双曲多様体に対してこの予想が成立することを筆者は証明して、論文が学術誌から出版された。また、漸近展開の準古典極限の項には Reidemeister torion が現れることが観察され、いくつかの例に対して筆者はそれを証明して、論文が学術誌から出版された。

筆者は、毎年度に、数理解析研究所において研究集会「Intelligence of Low-dimensional Topology」を開催した。とくに、2016年5月に開催した「Intelligence of Low-dimensional Topology」で

は、小野薫氏に Floer ホモロジーのゲージ理論的側面の解説講演をしていただき、丹下基生氏に Floer ホモロジーの組合せ的側面の解説講演をしていただいて、Floer ホモロジーの構成のアイデアが 3 次元トポロジーの研究者に共有されることをめざして、研究討論を行った。また、2018 年 5 月に開催した「Intelligence of Low-dimensional Topology」では、佐伯修氏に 4 次元多様体の構成法である trisection について解説講演をしていただいた。trisection は、「3 次元多様体の Heegaard 分解」の 4 次元への拡張であるとみなすことができ、4 次元トポロジーとの関連を期待する観点から、研究討論を行った。この研究集会において、筆者は problem session を企画し、その成果として未解決問題集を編集した。この研究集会の報告集を数理研講究録として出版した。この研究集会は、筆者や研究分担者や連携研究者との共同研究をすすめるにあたって、また、大学院生等の若手研究者との研究交流の面からも、大変有益であった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計22件（うち査読付論文 16件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Ohtsuki Tomotada	4. 巻 7
2. 論文標題 On the asymptotic expansion of the Kashaev invariant of the 5_2 knot	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Quantum Topology	6. 最初と最後の頁 669 ~ 735
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/QT/83	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ohtsuki Tomotada	4. 巻 28
2. 論文標題 On the asymptotic expansions of the Kashaev invariant of hyperbolic knots with seven crossings	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1750096 ~ 1750096
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0129167X17500963	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 OHTSUKI TOMOTADA, YOKOTA YOSHIYUKI	4. 巻 165
2. 論文標題 On the asymptotic expansions of the Kashaev invariant of the knots with 6 crossings	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	6. 最初と最後の頁 287 ~ 339
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0305004117000494	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ohtsuki Tomotada	4. 巻 18
2. 論文標題 On the asymptotic expansion of the quantum $SU(2)$ invariant at $q = \exp(4\pi N)$ for closed hyperbolic 3-manifolds obtained by integral surgery along the figure-eight knot	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 4187 ~ 4274
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/agt.2018.18.4187	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ohtsuki Tomotada, Takata Toshie	4. 巻 370
2. 論文標題 On the Quantum $SU(2)$ Invariant at $q = \exp(4\pi\sqrt{-1}/N)$ and the Twisted Reidemeister Torsion for Some Closed 3-Manifolds	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 151 ~ 204
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-019-03489-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Ohtsuki (ed.)	4. 巻 2004
2. 論文標題 Problems on Low-dimensional Topology 2016	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 115-129
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Ohtsuki, T. Ito (ed.)	4. 巻 2052
2. 論文標題 Problems on Low-dimensional Topology 2017	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 121-138
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Ohtsuki (ed.)	4. 巻 2099
2. 論文標題 Problems on Low-dimensional Topology 2018	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 105-118
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Ohtsuki (ed.)	4. 巻 2129
2. 論文標題 Problems on Low-dimensional Topology 2019	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Saeki Osamu	4. 巻 21
2. 論文標題 Linking between singular locus and regular fibers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Singularities	6. 最初と最後の頁 255-269
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5427/jsing.2020.21n	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Saeki Osamu	4. 巻 73
2. 論文標題 Elimination of definite fold II	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Kyushu J. Math.	6. 最初と最後の頁 239-250
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Saeki Osamu	4. 巻 64
2. 論文標題 A signature invariant for stable maps of 3-manifolds into surfaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 ROMANIAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS	6. 最初と最後の頁 541-563
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Saeki Osamu	4. 巻 2099
2. 論文標題 Simplified broken Lefschetz fibrations and trisections of smooth 4-manifolds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 42-59
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R.I. Baykur and O. Saeki	4. 巻 115
2. 論文標題 Simplified broken Lefschetz fibrations and trisections of 4-manifolds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the National Academy of Sciences	6. 最初と最後の頁 10894 ~ 10900
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1073/pnas.1717175115	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hamada, Hiroyasu; Matsutani, Shigeki; Nakagawa, Junichi; Saeki, Osamu; Uesaka, Masaaki	4. 巻 10
2. 論文標題 An algebraic description of screw dislocations in SC and BCC crystal lattices	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Pac. J. Math. Ind.	6. 最初と最後の頁 Art. 3, 20 pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 O. Saeki	4. 巻 報告集
2. 論文標題 Theory of singular fibers and Reeb spaces for visualization	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Topological Methods in Data Analysis and Visualization IV - Theory, Algorithms, and Applications	6. 最初と最後の頁 3-33
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-44684-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 O. Saeki and T. Yamamoto	4. 巻 222
2. 論文標題 Singular fibers of stable maps of manifold pairs and their applications	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 259-294
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-73639-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 O. Saeki	4. 巻 2049
2. 論文標題 A Vassiliev type invariant of order one for stable maps of 3-manifolds into surfaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 155-172
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 O. Saeki	4. 巻 B55
2. 論文標題 Topology of manifolds and global theory of singularities	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 185-203
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 O. Saeki and T. Yamamoto	4. 巻 16
2. 論文標題 Singular fibers of stable maps of 3-manifolds with boundary into surfaces and their applications	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 1379-1402
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/agt.2016.16.1379	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 O. Saeki and T. Yamamoto	4. 巻 675
2. 論文標題 Cobordism group of Morse functions on surfaces with boundary	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 279-297
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1090/conm/675	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Chattopadhyay, H. Carr, D. Duke, Z. Geng, and O. Saeki	4. 巻 58
2. 論文標題 Multivariate topology simplification	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Computational Geometry	6. 最初と最後の頁 1-24
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://doi.org/10.1016/j.comgeo.2016.05.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計19件 (うち招待講演 16件 / うち国際学会 14件)

1. 発表者名 T. Ohtsuki
2. 発表標題 On the asymptotic expansion of the quantum $SU(2)$ invariant at $q = \exp(4\pi\sqrt{-1}/N)$ for closed hyperbolic 3-manifolds obtained by integral surgery along the figure-eight knot
3. 学会等名 Volume conjecture and quantum topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 O. Saeki
2. 発表標題 Reeb graphs of smooth functions on manifolds
3. 学会等名 可微分写像の特異点論とその応用
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 0. Saeki
2. 発表標題 Data visualization using differential topology
3. 学会等名 International Joint Conference on AI & Data Science (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 0. Saeki
2. 発表標題 Unlinking singular loci from regular fibers and its application to submersions
3. 学会等名 Lefschetz Pencils and Low dimensional Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 0. Saeki
2. 発表標題 Data visualization using differential topology
3. 学会等名 National Taiwan Normal University(NTNU)-Kyushu University Joint Forum (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 0. Saeki
2. 発表標題 Simplified broken Lefschetz fibrations and trisections of 4-manifolds
3. 学会等名 Intelligence of Low-dimensional Topology (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 0. Saeki
2. 発表標題 Singular locus and regular fibers, do they link each other ?
3. 学会等名 15th International Workshop on Real and Complex Singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 0. Saeki
2. 発表標題 Elimination of definite fold for simple stable maps
3. 学会等名 Real Algebraic Geometry and Singularity Theory Symposium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 0. Saeki
2. 発表標題 Unlinking singular locus from regular fibers and its application to submersions
3. 学会等名 Geometry, Topology and Dynamics Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 0. Saeki
2. 発表標題 Introduction to singularity theory and fiber topology in multivariate data analysis
3. 学会等名 Topology, Computation and Data Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 0. Saeki
2. 発表標題 Indefinite fibrations on differentiable 4-manifolds
3. 学会等名 Brazil-Mexico 3rd Meeting on Singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 0. Saeki
2. 発表標題 A Vassiliev type invariant of order one for stable maps of 3-manifolds into surfaces
3. 学会等名 PRIMA 3rd Congress, Singularities of Spaces and Mappings (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 0. Saeki
2. 発表標題 Topologia das singularidades e teoria de $n\mathbb{R}\{o\}$ s
3. 学会等名 IV Encontro de Singularidades no Nordeste (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 0. Saeki
2. 発表標題 Simplifying indefinite fibrations and trisections of 4-manifolds
3. 学会等名 The 13th Kagoshima Algebra-Analysis-Geometry Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐伯修
2. 発表標題 可微分多様体上の安定写像のトポロジー
3. 学会等名 特異点の大域的研究 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 佐伯修
2. 発表標題 Stable maps on 3-manifolds and signatures of 4-manifolds with boundary
3. 学会等名 4次元トポロジー
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 佐伯修
2. 発表標題 A Vassiliev type invariant of order one for stable maps of 3-manifolds into surfaces
3. 学会等名 可微分写像の特異点論とその応用 (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 佐伯修
2. 発表標題 Indefinite fibrations on 4-manifolds
3. 学会等名 Differential Geometry, Lie Theory and Low Dimensional Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 佐伯修
2. 発表標題 安定写像の特異ファイバーとその応用
3. 学会等名 RIMS-IMI談話会(招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	佐伯 修 (Saeki Osamu) (30201510)	九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授 (17102)	
連携研究者	古田 幹雄 (Furuta Mikio) (50181459)	東京大学・数理科学研究科・教授 (12601)	