2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　６ 月　４ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ１３７５６
研究課題名（和文）エルゴード理論と複素解析を用いたKlein群論の再構成

研究課題名（英文）Remodelling Kleinin group theory using ergodic theory and complex analysis

研究代表者
大鹿　健一（Ohshika, Ken'ichi）

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：７０１８３２２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：従来位相幾何学的な記述しかなかったKlein群の理論とその諸概念を，Cannon-Thurston写像という道具を通して，複素解析的な枠組みで捉えるような形に改変する作業を韓国のWoojin Jeonらと共同でおこなった．さらに写像類群の幾何学的に自然な作用達が，剛性を持つことをStrasbourgのPapadopoulosとの共同研究で示した．またこの分野の重要な手法である擬等角写像と正則2次微分を指紋の数値化の研究に応用することを可能にした．

研究成果の学術的意義や社会的意義
Klein群の理論を3次元位相幾何学に依存しない形に拡張していくことにより，より開かれた理論体系とすることができた．これにより，この理論が，幾何的群論，Teichmuller空間論，複素力学系など数学内部で応用できるようになったのみならず，指紋の数値化という応用数学の結果にも結びつけることができた．

研究成果の概要（英文）：We remodelled Kleinian group theory and notions appearing there, which was expressed only in terms of three-dimensional topology before, to a form which can be described in terms of complex analysis, in joint work with a Korean mathematician Woojin Jeon among others. Furthermore in collaboration with Papadopoulos at Strasbourg, we showed that the mapping class group actions on measured lamination space equipped with intersection form or geodesic lamination space with left-Hausdorff topology have rigidity. Collborating with applied mathematicians in Gottingen, we gave a numeral index for finger prints making use of quasi-conformal maps and holomorphic quadratic differentials.

研究分野：位相幾何学

キーワード：Klein群　Teichmuller空間　擬等角写像

1．研究開始当初の背景

Klein 群論は，1980 年代の Thurston による研究と，彼の提出した 10 個の未解決問題を軸として，その 後 30 年あまりで急速に進展し，現在その 10 個の問題はほぼ全て解決された．これらの問題解決に 3 次元双曲多様体の理論は Klein 群の問題解決の為の大変有力な道具であったが，複素力学系や幾何学的群論にはその対応物が存在しない，このことが現在 Klein 群論での成果をこれらの分野に転用しようとする際の大きな障害となっている．一方で Klein 群は Riemann 球面の自己同型群であるから，Teichmüller 理論や擬等角写像，エルゴード理論をはじめとする，解析的手法が有効に使える．このような視点から最近の Klein 群論の成果を見直すことが今後のこの分野の研究の発展の為に必須と考えられた．

２．研究の目的

Thurston に始まる Klein 群のここ 30 年に亘る 3 次元多様体を用いた研究は，大きな成果を挙げた．しかし元来 Klein 群は Riemann 球面への１次分数変換の作用であり，Thurston の登場以前に，Ahlfors, Bers, Kra, Maskit らは，Teichmuller 空間論や，擬等角変形の理論の一般化として，Klein 群の理論を考え出したのであった．現在，30 年来懸案であった Klein 群論における諸予想が解決された時点で考えてみると，今後の理論の発展，応用のためには，３次元多様体を用いた手法にとらわれている必然性は薄くなっていると考える．

そこで，これまでの発想を逆転させ，「３次元多様体論に依拠しない Klein 群論」の構築を目指すのが本研究のテーマである．1980 年代の Sullivan の先駆的研究において，Klein 群のエルゴード理論的研究が始められ，また Klein 群と複素力学系の類似性が指摘された．この方向の研究の重要性は多くの研究者の認めるところであるが，昨今の３次元多様体を用いた Klein 群の研究に比し，こちらの研究は立ち後れているのが現状である．この立ち後れを解消するには，現在まで３次元多様体を用いて構築されてきた理論を一つ一つ，Riemann 球の作用のエルゴード理論と複素解析のみを用いたものに転換していく作業が必要である． またその過程で，Klein 群の変形空間の新たな埋め込み，Klein 群の作用の力学系的構造を解明する．

さらにこのように Klein 群論を構築し直すことにより，Klein 群論が理論として閉じたものではなく，他の重要な数学的対象，複素有理写像の力学系や，Gromov 双曲群の convergence 群としての作用などの研究に役立てるほか，応用数学にも目を向けて，開いた理論とする．

３．研究の方法

国内での研究は，大阪大学を拠点として行う．まず研究代表者大鹿と研究分担者角(2016 年度まで)が，エルゴード理論的手法での研究部分の基盤を整える．その後大鹿と連携研究者宮地が複素解析的手法での研究部分を完成させていく．これらがある程度完成した後に海外での共同に取りかかる．エルゴード理論的部分では Woojin Jeon (KIAS)，複素解析的部分では Athanase Papadopoulos　(Strasbourg 大学)との共同研究を進めるこの基礎研究が結果を挙げた時点で，応用の研究に取りかかる．

研究成果は随時国際集会等で発表する．国際的な発表は，Strasbourg 大学の他，中国，シンガポールなどで開かれる Teichmüller 理論関係の国際研究集会の場で行う．

４．研究成果

(1) 大阪大学におけるエルゴード理論，複素関数的な理論の整備と並行して，以前から共同研究者であった Woojin Jeoon との Patterson-Sullivan 測度を用いた ending lamination のエルゴード理論的な解釈を完成させ，論文として出版した．この研究の完成により，ending lamination 定理の 3 次元多様体から独立した記述とその証明のための道筋を示すことができた．Conical limit points の特徴付けの問題が残されたが，これについてはその後 Cyril Lecuire と Mahan Mj が解決をした．

(2) 宮地秀樹との共同研究で，極値的長さと交差形式を関連付ける微分公式を train track による近似を使うことにより得た．Teichmmüller 空間における解析的な理論と位相幾何学的情報を関連付けることができた．

(3) Klein 群の発散に伴う双曲多様体の退化について，Thurston の 1980 年代の論文の主張には反例があることを示した．さらに Thurston の主張を uniformisation theorem の証明に影響を与えずに修正する方法を示した．

(4)Gôttingen 大学の研究グループと共同で，Klein 群の変形の根拠となる擬等角変形理論と正則 2 次微分の理論を応用して，指紋データの数値化の研究を行った．この分野の研究の最初の実用への応用といえる．

(5)20 世紀の偉大な位相幾何学者，René Thom のコボルディズム以降の業績の解説を通じて，

数学の応用，数学教育のあるべき姿についての彼の見解を彼の哲学的立場とともに紹介した論文を執筆し，議論の材料とした．

(6)Papadopoulos との共同研究で，写像類群の変換群としての特徴付け，剛性の研究を行った．まず曲面の measured lamination space で交差形式を保つ同相写像の群は写像類群に一致することを示した．さらに geodesic lamination space に Hausdorff 左収束で入れた位相についての同相群を考えると，写像類群に一致することを示した．これらの結果は，以前おこなった Bers 境界と呼ばれる Klein 群の変形空間に現れる Teichmüller 空間の境界について,擬等角変形を潰して得られる商空間での類似の性質(Ohshika: Ann. Fourier Inst, 2014)と同じタイプの結果である．これらの結果から Klein 群の変形理論と写像類群の橋渡しを構築することを目指している．

(7)まだ論文の出版に至らない結果として，Mahan Mj との共同研究がある．Cannon-Thurston 写像は ending laination の関数論的解釈に決定的な役割を果たすものであるが，これが一般には Klein 群の変形について連続には動かないことが,Mj-Series の一連の研究によりわかった．Mj との共同研究では，擬 Fuchs 群の列について，極限で Cannon-Thurston 写像が連続に動かない場合の完全な特徴付けを与えた．この研究は今後一般の Klein 群への拡張を目指して継続している．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　８件）

全て査読あり．


1. Ken’ichi Ohshika and Athanase Papadopoulos, Bijections of geodesic lamination space preserving left Hausdorff convergence, to appear in Monat. Math. (2019) DOI: 10.1007/s00605-018-1233-4

2. Ken’ichi Ohshika et Athanase Papadopoulos, Homéomorphismes et nombre d'intersection, Comptes Rendus en Mathématiques 356 (2018), no. 8, 899–902；DOI :0.1016/j.crma.2018.06.009

3. Ken’ichi Ohshika, La topologie, la philosophie, et l'enseignement mathématique selon René Thom: le règne de la géométrie, Chap 10 de *René Thom, témoignages sur l'homme et son oeuvre* A. Papadopoulos, CNRS editions, (2018) 323-340

4. Ken’ichi Ohshika, Degeneration of marked hyperbolic structures in dimensions 2 and 3, *Handbook of Group Actions III*, Advanced Lectures in Mathematics 40, International Press Boston and Higher Education Press Beijing (2018), 13-35

５．C. Imahal, S. Gottschlich, S. Huckerman, and K. Ohshika, Möbius moduli for fingerprint orientation fields Journal of Mathematical Imaging and Vision, 60 (2018), 651–660, DOI:10.1007/s10851-017-0780-y

６．Ken’ichi Ohshika, The origin of the notion of manifold: from Riemann's Habilitationsvortrag onward, *From Riemann to differential geometry and relativity*, edited by L. Ji, A. Papadopoulos and S. Yamada, Springer Verlag, (2017), 295-309, DOI 10.1007/978-3-319-60039-0

７． Hideki Miyachi et Ken’ichi Ohshika, Une formule différentielle de la longueur extrémale et ses applications, Ann Math Blaise Pascal, 24 (2017), 115--133, DOI: 10.5802/ambp.366

８．Woojin Jeon and Ken’ichi Ohshika, Measurable Rigidity for Kleinian groups, Ergod. Th. Dyn. Sys., 36 (2016), 2498–2511 DOI: 10.1017/etds.2015.15


〔学会発表〕（計　８件）


１．Ken’ichi Ohshika, Maximality of mapping class group actions, 102e rencontre entre

mathématiciens et physiciens théoriciens, IRMA Strasbourg 13 Sept 2018

２．Ken'ichi Ohshika, Discontinuous motions of Cannon-Thurston maps, 20 February 2018, Géométrie des groupes et géométrie des 3-variétés: situation et perspectives. Luminy, Marseille, France

３．Ken'ichi Ohshika, Boundaries of quasi-Fuchsian spaces and continuous/discontinuous phenomena, GEOMETRY, GROUPS AND DYNAMICS, ICTS, 9, 13 November 2017, Tata Institute for Fundamental Science, Bangalore, India

４．Ken'ichi Ohshika, Discontinuous motions of Cannon-Thurston maps, Geometric Topology Fair, 12 May 2017, KAIST, Daejeon, Korea

５．Ken'ichi Ohshika , Deformation spaces of Kleinian groups and what are continuous and discontinuous there, Moduli spaces and applications in geometry, topology, analysis and mathematical physics, 27 February, 2017, Morningside Center of Mathematics, Chinese Academy of Science, Beijing, China

６．Ken'ichi Ohshika , Geometric realisation for degenerations of hyperbolic structures, 18 August 2016, Workshop on Moduli Spaces of Geometric Structures, IMS, National University of Singapore, Singapore

７．Ken'ichi Ohshika , Reduction of boundaries of Teichmüller spaces, 25 July 2016, Workshop on Grothendieck-Teichmüller Theories, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin, China

８．Ken'ichi Ohshika , 3-manifolds fibring over the circle: from Poincaré's Analysis Situs to today, Autour de Poincaré 86ème rencontre entre les mathématiciens et les physiciens théoriques, IRMA Université de Strasbourg, 2016.6.8

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：角　大輝

ローマ字氏名：(Hiroki Sumi)

所属研究機関名：京都大学
部局名：人間・環境学研究科
職名：教授
研究者番号（8 桁）：40313324

(2)研究協力者
研究協力者氏名：宮地 秀樹
ローマ字氏名：(Hideki Miyachi)

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。