

令和元年6月27日現在

機関番号：24402

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K13757

研究課題名（和文）カンドルおよび離散的対称空間の構造理論の構築

研究課題名（英文）Constructing structure theories of quandles and discrete symmetric spaces

研究代表者

田丸 博士（Tamaru, Hiroshi）

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：50306982

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,700,000円

研究成果の概要（和文）：非連結な平坦カンドルに関する結果と、カンドル内の極大対称可換な部分集合に関する結果が得られた。前者では、任意のグラフから非連結な平坦カンドルを構成し、構成された平坦カンドルが等質であることのための必要十分条件はグラフが頂点推移的であることを示した。この結果は、一般的にグラフとカンドルが関連することを示唆する。また後者では、カンドル内の極大対称可換な部分集合という概念を定義し、有向実グラスマン多様体あるいはコンパクト古典型リー群について、その中の極大対称可換部分集合を多くの場合に決定することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、対称空間論を参考として、様々な概念や手法をカンドルに対して導入し、その性質を明らかにしている。対称空間論とカンドルを結びつける研究は独自のものであり、新たな研究領域を開拓しているものだと考える。さらにカンドルの研究を通して、対称空間の研究にも新たな知見が付け加えられている。

研究成果の概要（英文）：We obtained results on disconnected flat quandles and on symmetry-commutative subsets in quandles. In the former, we construct disconnected flat quandles from any graph, and proved that the constructed quandle is homogeneous if and only if the graph is vertex-transitive. In the latter, we defined the notion of symmetry-commutative subsets in quandles, and determined them for many cases, such as oriented Grassmannians and compact classical Lie groups.

研究分野：幾何学

キーワード：カンドル 対称空間

1. 研究開始当初の背景

カンドル(またはカンドル代数)は,所定の公理をみたす二項演算を持つ代数系であり,その公理は結び目のライデマイスター移動と対応している(Joyce, D.: A classifying invariant of knots, the knot quandle, J. Pure Appl. Algebra 23 (1982)).カンドルは,結び目の不変量の構成や評価などに活発に応用されている。一方で対称空間は,各点 x に対して所定の性質を満たす点対称 s_x が存在する空間である。連結な対称空間は,二項演算を点対称を用いて適切に定めることにより,カンドルとなる。この事実は以前から知られていたが,両者を関連付けた研究はほとんど無かった。我々は数年前から対称空間論を用いたカンドルの研究を行っており,以下のような結果を得ている:

- (1) 我々は,対称空間における二点等質性の概念をカンドルに対しても定義し,素数位数の二点等質カンドルの分類を与えた。なお,この研究は他の研究者により継続され,現在では有限な二点等質カンドルの分類も完成している。
- (2) 我々は,カンドルの平坦性の概念を定式化し,有限かつ連結な平坦カンドルの分類を与えた。分類結果は,そのようなカンドルは“離散トーラス”と呼ばれるものに限ることを述べており,コンパクトなリーマン対称空間でよく知られた定理の離散版と考えられる。

2. 研究の目的

カンドルは,離散的な対称空間(の一般化)と考えることができる。このような観点から,カンドルおよび離散的な対称空間の構造理論の構築を目的とする。もう少し詳しく述べた研究目的は,以下の通りである:

- (1) 対称空間論の離散化を行う。すなわち,対称空間論に登場する様々な概念を,点対称だけの情報で再定式化し整備する。
- (2) 上記の研究を踏まえて,対称空間論における概念・アイデアや道具をカンドルに移植し,カンドルの構造理論を構築する。

3. 研究の方法

本研究においては,カンドルおよび離散的な対称空間の構造理論の構築を目的としている。リーマン対称空間の構造理論において,平坦性の概念は極めて本質的な役割を果たす。例えば対称空間の階数という概念は,平坦性を用いて定義されている。これらのことから,カンドルにおける平坦性の概念をよりよく理解することを目的の一つとする。また,他にも対称空間論の本質を担う様々な概念があるので,これらのうち,どれがカンドルの理論において適切な対応物をもつかを明らかにする。

カンドルの平坦性に関しては,連結な場合には分類が得られているため,非連結な平坦カンドル,特にそのうち等質なものがどの程度存在するかを明らかにする。また,対称空間の階数は,極大平坦全測地的部分多様体の次元として定義される。従って,平坦性の他にも部分多様体に関する概念をカンドルにおいて考察する。

4. 研究成果

研究成果は大きく分けて二つある。一つは非連結な平坦カンドルに関するものである。我々の研究により,任意のグラフから非連結な平坦カンドルが構成できること,また構成された平坦カンドルが等質であることのための必要十分条件はグラフが頂点推移的であることが分かった。これにより,非連結な等質平坦カンドルが無限に存在することが従う。また,このようなグラフを用いたカンドルの構成は,これ以外にも様々なバリエーションがあることも分かっているため,一般的にグラフとカンドルを関連付ける研究の橋頭保ともなる結果だと考えている。

もう一つの研究成果は,カンドル内の極大対称可換部分集合に関するものである。この概念は我々が本研究を通して定義したものであり,対称空間論における「対蹠性」の概念の一般化になっている。特に,例えば極大対称可換部分集合の決定あるいは分類については,対称空間の場合にさえ全く解明されていない,未開拓の領域である。我々の研究により,有向実グラスマン多様体,あるいはコンパクト古典型リー群について,その中の極大対称可換部分集合を,多くの場合に決定することができた。今後は,このような極大対称可換部分集合が外の空間の性質をどのように反映するか,という問題に発展していく予定である。

また,最終年度の2018年11月には,「カンドルと対称空間」と題した研究集会を大阪市立大学において開催した。この研究集会には,カンドルあるいは対称空間を専門とする研究者だけでなく,組み合わせ論を専門とする講演者も招待し,通常ではあまり見られないタイプの分野横断的な研究集会となったと考えている。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 11 件)

- (1) Yoshitaka Ishihara, Hiroshi Tamaru, Flat connected finite quandles. Proc. Amer. Math. Soc. 144 (2016), 4959--4971. DOI: 10.1090/proc/13095
- (2) Seiichi Kamada, Hiroshi Tamaru, Koshiro Wada, On classification of quandles of cyclic type. Tokyo J. Math. 39 (2016), 157--171. DOI: 10.3836/tjm/1459367262
- (3) Sadahiro Maeda, Hiroshi Tamaru, Hiromasa Tanabe, Curvature properties of homogeneous real hypersurfaces in nonflat complex space forms. Kodai Math. J. 41 (2018), 315--331. DOI: 10.2996/kmj/1530496844
- (4) Yuichiro Taketomi, Hiroshi Tamaru, On the nonexistence of left-invariant Ricci solitons --- a conjecture and examples. Transf. Groups 23 (2018), 257--270. DOI: 10.1007/s00031-017-9439-4
- (5) Jong Taek Cho, Takahiro Hashinaga, Akira Kubo, Yuichiro Taketomi, Hiroshi Tamaru, Realizations of some contact metric manifolds as Ricci soliton real hypersurfaces. J. Geom. Phys. 123 (2018), 221--234. DOI: 10.1016/j.geomphys.2017.08.013
- (6) Jong Taek Cho, Takahiro Hashinaga, Akira Kubo, Yuichiro Taketomi, Hiroshi Tamaru, The solvable models of noncompact real two-plane Grassmannians and some applications. In: Hermitian-Grassmannian Submanifolds, Springer Proc. Math. Stat. 203 (2017), 311--321. DOI: 10.1007/978-981-10-5556-0_26
- (7) Takahiro Hashinaga, Hiroshi Tamaru, Three-dimensional solvsolitons and the minimality of the corresponding submanifolds. Internat. J. Math. 28 (2017), 1750048 [31 pages]. DOI: 10.1142/S0129167X17500483
- (8) Akira Kubo, Kensuke Onda, Yuichiro Taketomi, Hiroshi Tamaru, On the moduli spaces of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on Lie groups. Hiroshima Math. J. 46 (2016), 357--374.
- (9) Takahiro Hashinaga, Akira Kubo, Hiroshi Tamaru, Homogeneous Ricci soliton hypersurfaces in the complex hyperbolic spaces. Tohoku Math. J. (2) 68 (2016), 559--568. DOI: 10.2748/tmj/1486177215
- (10) Hiroshi Tamaru, The space of left-invariant Riemannian metrics. In: Geometry and Topology of Manifolds, Springer Proc. Math. Stat. 154 (2016), 315--326. DOI: 10.1007/978-4-431-56021-0_17
- (11) Takahiro Hashinaga, Hiroshi Tamaru, Kazuhiro Terada, Milnor-type theorems for left-invariant Riemannian metrics on Lie groups. J. Math. Soc. Japan 68 (2016), 669--684. DOI: 10.2969/jmsj/06820669

〔学会発表〕(計 19 件)

- (1) Hiroshi Tamaru, カンドルおよび対称空間内のある種の部分集合, 部分多様体論・湯沢 2018 (湯沢グランドホテル), 2018/11/30.
- (2) Hiroshi Tamaru, Discrete symmetric spaces, quandles, and their subsets, 広島大学 数学教室談話会 (広島大学), 2018/07/24.
- (3) Hiroshi Tamaru, Flat quandles, graphs, and subsets in symmetric spaces, 第 35 回代数的組合せ論シンポジウム (広島工業大学), 2018/06/19.
- (4) Hiroshi Tamaru, Flat quandles and finite subsets in symmetric spaces, Hakata Workshop Winter Meeting 2018: Discrete Mathematics and its Applications (リファレンス駅東ビル), 2018/02/23.
- (5) Hiroshi Tamaru, Quandles and discrete symmetric spaces --- flatness and commutativity, The 13th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on Submanifold Geometry and Lie Theory (大阪市立大学), 2017/03/28.
- (6) Hiroshi Tamaru, カンドルにおける平坦性と可換性, 北九州ワークショップ「幾何学と組合せ論」(リファレンス小倉魚町), 2017/03/11.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

- (1) Hiroshi Tamaru, 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part IV. In: 研究集会「部分多様体論・湯沢 2018」記録集 (2019).
- (2) Hiroshi Tamaru, 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part III. In: 第 35 回代数的組合せ論シンポジウム記録集 (2018), 67--73.

6 . 研究組織

(1)研究分担者 なし

(2)研究協力者 なし

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。