

令和 2 年 6 月 15 日現在

機関番号：32606

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2019

課題番号：16K13758

研究課題名(和文)第1象限の幾何学

研究課題名(英文)Geometry of the first orthant

研究代表者

山田 澄生 (Yamada, Sumio)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号：90396416

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：多様体上の幾何学的な量の(可算無限)族を、第1象限の座標とすることで、多様体のモジュライの新たな方法論の確立した。これまでに代数幾何学・複素幾何学的な手法によって牽引されてきたモジュライ空間論に新しい視点を導入することを可能にした。特に、リーマン面の変形理論であるTeichmüller理論に登場するいくつかの異なる幾何学を統合的に俯瞰する道具立ての定式化に成功した。またH. Busemannによって半世紀前に提唱された時間的な距離空間の理論を凸幾何学の観点から再考し、時間的ヒルベルト計量およびフンク計量を定義し、一般相対性理論に付随した距離空間の定式化を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ユークリッド空間の第1象限という古典的な空間は、多様体の幾何構造を表現する正值の幾何学的汎関数を座標関数として同一視することで、多様体のモジュライ空間の普遍的な母空間として機能することを提唱した。一方で第1象限は、射影幾何学的な観点から自然な対象であり、幾何構造のモジュライ理論に必然的に現れる非線形な振る舞いの表現空間として、線形代数的な言葉を用いてモジュライの振る舞いを解析する新たな方法論を定式化したことには意義がある。また一般相対性理論の重要性が再認識されている中で、本研究で確立された時空の幾何学を扱うための新しい数学的枠組みは、科学的な必然性を持つ方向性であると考えられる。

研究成果の概要(英文)：There typically exists countably many positive quantities affiliated with any Riemannian manifold, each of which is marked with topological labeling of the manifold. Those quantities can be thought of as the coordinates for the first orthant of the Euclidean space. In this way, the space of the Riemannian manifolds are smoothly embedded into the orthant, allowing a completely new approach in the moduli theory of Riemannian geometry, which include the Teichmüller theory. Also accomplished in this project is the new formulation of timelike geometry, after the work of H. Busemann, dated half a century ago. The timelike geometry generalizes the Lorentzian geometry in the context of the theory of metric spaces, and it has opened up a new perspective in the Finsler geometry of non-positive definite type.

研究分野：幾何学

キーワード：距離空間 射影幾何学 複比 タイヒミュラー理論 測地線 凸幾何学 フィンスラー幾何学 時空の幾何学

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

1. 研究開始当初の背景

双曲空間、ノルム線形空間、モジュライ空間、タイヒミュラー空間をはじめとする多様な凸空間には、射影幾何学を用いることで、ユークリッド空間の第1象限内への canonical な等長埋め込みが存在する。本研究の発端は、研究代表者が発表した論文 (Convex bodies in Euclidean and Weil-Petersson geometries, Proceedings AMS (2014)) において、凸体の境界集合を座標の族とするユークリッド空間の第1象限が、凸体の幾何構造の普遍的助変数空間であることに注目したことに起因する。とくに射影幾何学およびフィンスラー幾何学の視点から第1象限内の部分多様体論を定式化し、凸体の外在的および内在的な微分幾何学の相関性を明らかにすることの重要性を問題提起した。

この問題意識は、ガウスがユークリッド空間内の曲面論から「驚異の定理」を創出し、リーマンがそれを高次元化することで生まれた近代微分幾何学の歴史的発展を、フィンスラー幾何学の視点からなぞるものである。幾何学的対象としては、可算無限次元のユークリッド空間の第1象限に内在する部分集合を扱う。タイヒミュラー空間上に定義されるタイヒミュラー距離関数は、この最たる例として重要であり、これまで様々な視点から凸解析に研究の対象を絞ってきた研究代表者にとって、第1象限という凸体の解明の意義は大きい。

双曲幾何学の歴史上最初のモデルであるベルトラミ・クライン・モデルは、複比を用いて定義されている。この複比を、第1象限の座標関数の比として捉えることで、双曲平面が第1象限内の部分多様体として認知される。一方で、双曲平面が平坦なトーラス全体からなるモジュライ空間の最初の例としてよく知られている。実際この意味で、ベルトラミ・クライン・モデルは、タイヒミュラー、アールフォース、ベイユ、グロタンディックたちによって構築されたタイヒミュラー理論の出発点となっている。

このような一連の観察の連携が、本研究課題の出発点となった。

2. 研究の目的

第1象限を表現空間とする凸幾何学を確立し、タイヒミュラー空間をはじめとする様々なモジュライ空間論に、新しい観点からの大域的幾何学を展開することを目的とした。とくにこの文脈で、凸体の外在的および内在的な微分幾何学の相関性を明らかにすることで、リーマン幾何学では扱うことのできなかつた凸幾何学の枠組みを構成することを目指した。

本課題を遂行にあたって、ユークリッド計量に代えて、フンクおよびヒルベルト計量という正準的かつ明示的幾何構造をもつ第1象限を ambient 空間とした。その部分多様体に内在的な幾何学的構造を誘導するというフィンスラー凸幾何学におけるガウスの驚異の定理に対応する部分多様体のフィンスラー幾何学の内在的な定式化が、大きな目的であった。

また射影幾何学を測地線の振る舞いを理解する幾何学という意味で、リーマン幾何学に対してローレンツ幾何学に呼応する、時間的な距離空間というカテゴリーを、凸解析の観点から定式化することを目指した。この方向性は、さまざまな距離空間において測地線の挙動を理解することに一生を捧げた偉大な幾何学者 H・ビューズマンの遺した問題意識を再訪することで、フィンスラー幾何学に新しい問題意識を導入することを目指した。

3. 研究の方法

ユークリッド空間内の凸体に定義されるヒルベルト計量およびフンク計量は、射影幾何学およびアファイン幾何学と密接に関係することが知られている。これらのフィンスラー計量を精査する作業を、凸体に付随する支持超平面という道具を介して第1象限の幾何学に結びつけ、行った。

例えば、無限次元の第1象限には、大きな射影変換群が作用している。必然的に非線形な構造を持つことが期待される多様体上の幾何構造のモジュライ空間を、無限次元線型空間内に埋め込むことで、非線形性を持つ幾何学的情報を線形代数学的な言語をもって再構成した。この作業を通して、本研究の方法論は、凸体の対称性を射影変換として捉えることが可能となり、その一例としてリーマン面の写像類群を射影変換群の部分群として再解釈することを可能にした。

また H・ビューズマンによって半世紀前に提唱されて以来、ほぼ忘れ去られてきた「時間的距離空間の幾何学 (Timelike spaces. (1967))」を、ユークリッド空間、および球面内の凸体の外部領域に射影幾何学を用いて定義されたフンク、ヒルベルト計量に依る幾何学を厳密に定式化することで、時間的幾何学に内在する凸解析の表現方法を新たに構築した。

4 . 研究成果

リーマン面をはじめとする多様体上には、定義される幾何学的な量（例：閉測地線の長さ）の（可算無限）族が豊富に存在する。それらを第1象限の座標とすることで、多様体のモジュライを決定するという方法論の確立は、代数幾何学的手法によって牽引されてきたモジュライ空間論に新しい視点を導入することを可能にした。その結果、リーマン面の変形理論であるタイヒミュラー理論に登場するいくつかの異なる幾何学を統合的に俯瞰する道具立ての定式化に成功した。

またビューズマンによって半世紀前に提唱された時間的な距離空間の理論を凸幾何学の観点から再考し、時間的ヒルベルト計量およびフンク計量を定義した。時間的な距離空間は、相対性理論の数学的土壌となっているローレンツ幾何学の自然な一般化であり、リーマン幾何学で表現することのできなかつた新たな幾何学の入り口に立つことができたと考える。この新たな展開は、直線を測地線とする距離空間の分類を目標としたヒルベルトの第5問題に新しい息吹をもたらすに至っている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計18件（うち査読付論文 15件 / うち国際共著 11件 / うちオープンアクセス 15件）

1. 著者名 Nozawa Masato, Shiromizu Tetsuya, Izumi Keisuke, Yamada Sumio	4. 巻 35
2. 論文標題 Divergence equations and uniqueness theorem of static black holes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Classical and Quantum Gravity	6. 最初と最後の頁 175009 ~ 175009
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6382/aad206	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Khuri Marcus, Matsumoto Yukio, Weinstein Gilbert, Yamada Sumio	4. 巻 372
2. 論文標題 Plumbing constructions and the domain of outer communication for 5-dimensional stationary black holes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3237 ~ 3256
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/7812	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Athanasios Papadopoulos, Sumio Yamada	4. 巻
2. 論文標題 Busemann's metric theory of timelike spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Herbert Busemann Selected Work, Springer	6. 最初と最後の頁 117, 133
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yamada Sumio	4. 巻 67
2. 論文標題 Timelike Hilbert and Funk Geometries	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 101554
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2019.101554	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Marcus Khuri, Gilbert Weinstein, 山田 澄生	4. 巻 43(8)
2. 論文標題 Stationary Vacuum Black Holes in 5 Dimensions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 1205-1241
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1080/03605302.2018.1517791	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Marcus Khuri, 松本幸夫, Gilbert Weinstein, 山田澄生	4. 巻 1
2. 論文標題 Plumbing Constructions and the Domain of Outer Communication for 5-Dimensional Stationary Black Holes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 to appear in Transactions of American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1090/tran/7812	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Keisuke Izumi, Masato Nozawa, Tetsuya Shiromozu, Sumio Yamada	4. 巻 35(17)
2. 論文標題 Divergence equations and uniqueness theorem of static black hole	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Classical and Quantum Gravity	6. 最初と最後の頁 1
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1088/1361-6382/aad206	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Marcus Khuri, Gilbert Weinstein, 山田 澄生	4. 巻 2018(5)
2. 論文標題 Asymptotically Locally Euclidean/Kaluza-Klein Stationary Vacuum Black Holes in 5 Dimensions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Progress of Theoretical and Experimental Physics	6. 最初と最後の頁 1
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1093/ptep/pty052	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Athanasios Papadopoulos, Sumio Yamada	4. 巻 182(4)
2. 論文標題 Deforming hyperbolic hexagons with applications to the arc and the Thurston metrics on Teichmüller spaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Monatshefte für Mathematik	6. 最初と最後の頁 913,939
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s00605-017-1023-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Sumio Yamada	4. 巻 -
2. 論文標題 Riemann's Work on Minimal Surfaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Riemann to Geometry and Relativity edited by L. Ji, A. Papadopoulos and S. Yamada Springer (2017), Chapter 4	6. 最初と最後の頁 135, 150
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-60039-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sumio Yamada	4. 巻 30
2. 論文標題 On the Weil-Petersson convex geometry of Teichmüller space	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 AMS Sugaku Expositions	6. 最初と最後の頁 159,186
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1090/suga/422	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sumio Yamada	4. 巻 -
2. 論文標題 Timelike Hilbert and Funk Geometries	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 arXiv:1602.07072 [math.DG]	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) arXiv:1602.07072 [math.DG]	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Marcus Khuri, Gilbert Weinstein, Sumio Yamada	4. 巻 -
2. 論文標題 Stationary Vacuum Black Holes in 5 Dimensions	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 arxiv.org/abs/1711.05229	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) arxiv.org/abs/1711.05229	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Athanasios Papadopoulos, Sumio Yamada	4. 巻 1
2. 論文標題 Busemann's metric theory of timelike spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Herbert Busemann Selected Work, Springer (2018)	6. 最初と最後の頁 117, 133
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Marcus Khuri, Gilbert Weinstein, Sumio Yamada	4. 巻 -
2. 論文標題 Asymptotically Locally Euclidean/Kaluza-Klein Stationary Vacuum Black Holes in 5 Dimensions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 To appear in Progress of Theoretical and Experimental Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://arxiv.org/abs/1802.02457	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Marcus Khuri, Gilbert Weinstein, Sumio Yamada	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Proof of the Riemannian Penrose Inequality with Charge for Multiple Black Holes	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Differential Geometry	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Sumio Yamada	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Riemann's Work on Minimal Surfaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 From Riemann to Geometry and Relativity Springer	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sumio Yamada, Athanase Papadopoulos	4. 巻 182
2. 論文標題 Deforming hyperbolic hexagons with applications to the arc and the Thurston metrics on Teichmüller spaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Monatshefte für Mathematik	6. 最初と最後の頁 13, 39
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00605-017-1023-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計18件 (うち招待講演 18件 / うち国際学会 11件)

1. 発表者名 山田 澄生
2. 発表標題 Stationary Einstein equation and harmonic maps
3. 学会等名 The 2nd International Conference Geometry of Submanifolds and Integrable Systems, 大阪市大, 2019年3月25日 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山田 澄生
2. 発表標題 Einstein, Weyl, and five-dimensional blackhole spacetime.
3. 学会等名 Physics Department Seminar, Ariel University, Israel, 2019年2月26日 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山田 澄生
2. 発表標題 On the shapes of domains of outer communication of the 5D Einstein spacetimes
3. 学会等名 リーマン幾何と幾何解析 筑波大学 2019年1月26日 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山田 澄生
2. 発表標題 Harmonic maps and the Einstein equation
3. 学会等名 国際研究集会 Analysis and Geometry in Minimal Surface Theory, 慶州、韓国 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田 澄生
2. 発表標題 H.ワイルによるアインシュタイン方程式と高次元ブラックホール時空
3. 学会等名 京都大学理学研究科数学専攻 談話会 2018年10月24日 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田 澄生
2. 発表標題 The Einstein equation according to Hermann Weyl
3. 学会等名 The 102th Encounter between Mathematicians and Theoretical Physicists, IRMA, Strasbourg, France 2018年9月15日 Athanase Papadopoulos (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田 澄生
2. 発表標題 Harmonic map, symmetric space and Einstein equation
3. 学会等名 New Trends in Teichmüller Theory and Mapping Class Groups, Oberwolfach Mathematical Institute, Germany, 2018年9月8日 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田 澄生
2. 発表標題 調和写像とアインシュタイン方程式 - 5次元定常時空の構成法 -
3. 学会等名 名古屋大学多元数理研究科談話会 2018年7月11日 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田 澄生
2. 発表標題 Harmonic maps in general relativity
3. 学会等名 The 11th Mathematical Society of Japan (MSJ) Seasonal Institute (SI), "The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations" 北海道大学, 2018年7月3日 日本数学会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田澄生
2. 発表標題 Harmonic map construction of 4+1 spacetimes with non-spherical blackholes
3. 学会等名 99e rencontre entre mathématiciens et physiciens théoriciens : Géométrie et physique, Université de Strasbourg (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 山田澄生
2. 発表標題 Construction of stationary blackhole solution to the 4 + 1 vacuum Einstein equation with non-spherical horizons
3. 学会等名 Workshop “ Analysis, Geometry and Topology of Positive Scalar Curvature Metrics ” ,Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 山田澄生
2. 発表標題 アインシュタイン方程式と調和写像
3. 学会等名 研究集会『離散幾何解析学の進展』,明治大学中野キャンパス(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田澄生
2. 発表標題 Harmonic Maps and the Einstein Equation: constructing a new set of stationary solutions in 5 dimension
3. 学会等名 Workshop on Geometric Analysis and General Relativity,The Chinese University of Hong Kong (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田澄生
2. 発表標題 アインシュタイン方程式と調和写像
3. 学会等名 研究集会『リーマン幾何と幾何解析』、筑波大学(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田澄生
2. 発表標題 アインシュタイン・マックスウェル方程式の幾何学
3. 学会等名 日本数学会幾何学分会シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Sumio Yamada
2. 発表標題 Penrose inequality for the Einstein-Maxwell equation
3. 学会等名 Workshop "Geometric inequalities on Riemannian manifolds and related topics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Sumio Yamada
2. 発表標題 Construction of stationary solutions to the 4+1 Einstein equation with nonspherical blackholes
3. 学会等名 Tokyo & Berkeley Mathematics Workshop Partial Differential Equations and Mathematical Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Sumio Yamada
2. 発表標題 New exact solutions to the vacuum 4+1 dimensional Einstein equation with non-spherical blackhole horizons
3. 学会等名 Workshop "PDEs, Geometric Analysis & Functional Inequalities" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Athanasios Papadopoulos, Lizhen Ji, 山田澄生	4. 発行年 2017年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 681
3. 書名 From Riemann to Differential Geometry and Relativity	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----