様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　　６ 月 ２０ 日現在

機関番号：１２１０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ１３７６０

研究課題名（和文）選択関数に基づいた不変部分空間問題の位相解析的・幾何的な構造の研究

研究課題名（英文）Research on topological and geometrical structure of invariant subspace problem based on a choice function

研究代表者
平澤　剛（hirasawa, go）

茨城大学・理工学研究科（工学野）・教授

研究者番号：１０４３４００２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：最大の目標である可分 Hilbert 空間上の不変部分空間問題に対する解決へのロードマップの作成、もしくは解決への糸口を見つけるという目標は達成できなかったが、本研究の方法で登場する選択関数についての知見と半閉部分空間に関するいくつかの成果が得られ、今後に繋げることができたと考えている。特に、主成果として、Uhlmannの補間的作用素平均を用いて２つの半閉部分空間を繋ぐpathを導入し、pathの不変性に関する結果を得ることができた。補間的作用素平均として作用素p-幾何平均に特化することにより、新しい知見を得ることもできた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
不変部分空間問題（ISPと略記）は、J.von Neumann の時代から世界の多くの数学者によって長い間研究されてきており、様々な研究成果があるが、未だに完全には解決されていない。線形代数の延長上に位置するISPは、数学の基盤問題として学術的に意義があり、この問題を解決することは多くの数学者に注視されることでもあるため、社会的意義も大きいと考えられる。本研究成果は、新しい視点からアプローチを行うための途中経過の位置付けである。

研究成果の概要（英文）：Although the goal of creating a roadmap to solve the invariant subspace problem on a separable Hilbert space, or finding a clue to a solution could not be achieved, I obtained some results which couled be linked to the future. Results we obtained are on the choice function that appears in the our method of this research and on semi-closed subspaces. As a main result, we introduced a path connecting two semi-closed subspaces using Uhlmann's interpolation operator means, and obtained results on a invariant property of a path. By considering the p-geometric operator mean as an interpolation operator mean, new findings could be obtained.

研究分野：関数解析学

キーワード：不変部分空間　半閉部分空間　区間縮小法　線形次元　path　作用素幾何平均

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

本研究の直接的な背景は、不変部分空間問題（以下、ISP (Invariant Subspace Problem)と呼ぶ）である。すなわち、「可分 Hilbert 空間上の任意の有界線形作用素（以下、有界作用素と呼ぶ）は常に非自明で不変な閉部分空間を有するか？」という問題である。歴史的にはかなり古くから考察されている問題であり、John von Neumann の時代に端を発する。Hilbert 空間を除く Banach 空間上の有界作用素は常に非自明で不変な閉部分空間を有するか？については、ある Banach 空間とその上で定義されたある有界作用素について非自明で不変な閉部分空間が存在しない例が知られている。従って、残された未解決問題が Hilbert 空間のケースである。有限次元や非可算次元の Hilbert 空間の ISP はすでに肯定的に解決されているため、可算次元、すなわち可分 Hilbert 空間の場合が長い間未解決なままになっている。これまで、不変な閉部分空間を有するための十分条件の研究が、多くの数学者によって研究されてきた。例えば、サブ正規性を備えた有界作用素は非自明で不変な閉部分空間をもつことはよく知られている。この他にも、重要な研究結果が知られているが、おそらくそれらの多くが不変部分空間が存在するような有界作用素への付帯条件の研究であると思われる。そこで、条件を有界作用素に課すのではなく、Hilbert 空間の‘無限性’に関わる選択関数に３つの仮定条件を課す方針のもと考察をしてきた。その結果、それらの仮定条件のもとで、半閉部分空間からなる集合全体がある距離に関して完備となり、区間縮小法を適用するための最低限の環境が整ったことが本研究の開始当初の背景である。

２．研究の目的

本研究の最大の目的は、ISP に対する解決へのロードマップを作成すること、あるいは解決への糸口を見つけることである。Hilbert 空間としての次元が有限または非可算の場合は、不変部分空間問題はほとんど自明な理由により肯定的に解かれる。それに対して、可算次元、すなわち、可分 Hilbert 空間の場合は、これほど多くの研究成果があるにも関わらず肯定的に解けるか否かの確固たる予想すら知られていない。Hilbert 空間としての次元が有限または非可算の場合、それらは線形次元にそれぞれ一致するのに対し、Hilbert 空間としての次元が可算の場合は線形次元には一致しない。特に、連続体仮説のもとでは、次元と線形次元が異なる唯一の Hilbert 空間が可分 Hilbert 空間である。このような状況から、もし、次元と線形次元が一致していないことが未解決のままであることの主要因であれば、問題は本質的である。つまり、「可分 Hilbert 空間上の有界作用素は常に非自明で不変な閉部分空間が存在する」という命題が ZFC 公理系（＋連続体仮説）で独立であるならば、今後の ISP への研究は徒労に終わることになる。これを回避するため、本研究に登場する選択関数にいくつかの仮定条件を課すことにより考察の進展を図る。このようなことから、本研究の目的には、‘無限性’という困難に対する対処法の有効性の成否を問う意図も含まれている。

３．研究の方法

すべての有界作用素は、常に不変な半閉部分空間を非可算個有することが知られている。非可算個ある不変な半閉部分空間のうち、少なくとも１つ閉なものがあれば ISP が肯定的に解かれることになる。このような示唆のもと、半閉部分空間の集合上に選択関数に基づいた距離関数を与え、その距離空間が完備となるように、さらには議論が簡素になるように、選択関数に

諸条件を仮定した。このような完備距離空間において、半閉部分空間からなる区間縮小法を用いて閉部分空間を構成していくことが本研究の方法である。

もう少し詳細に述べよう。非可算個ある不変な半閉部分空間において、包含関係があって大きい方の空間の中で小さい方の空間の代数的余次元が無限となる２つの半閉部分空間のペアを考え、これらを両端点とする区間を第一区間とする。代数的余次元の無限性と 2001 年の L.Rodman and N.Zobin の結果により、この区間には両端点以外の不変な半閉部分空間が存在することがわかる。すると、それにより第一区間が２つに分割された区間のうち、少なくとも一方の区間は（先ほど述べた意味で）代数的余次元は無限となるので、その区間を第二区間とする。第二区間の代数的余次元の無限性と上述の結果により、この区間には両端点以外の不変な半閉部分空間が存在する。それにより第二区間が２つに分割された区間のうち、少なくとも一方の区間は代数的余次元は無限となるので、その区間を第三区間とする。というように、代数的余次元の無限性により、帰納的に単調減少区間列の存在性がわかるが、最重要課題は距離に関して直径がゼロに収束するように区間列を具体的に構成できるか、である。もし可能ならば各区間の両端点は不変な半閉部分空間になるように選んでいくことで、それらに挟まれながらの区間縮小法極限として不変な閉部分空間を得ようという算段である。このように構成のアルゴリズムを考えていく際、諸要請を満たすように考えていく必要があるが、本研究で考案した path を用いて区間の両端点の半閉部分空間を結び、その path 上から次の区間の両端点を選んでいくことで区間列を構成する立場をとっている。

４． 研究成果

「２．研究の目的」で述べた最大の目的を達成するような成果は得られなかったが、いくつかの進展があったので報告する。まずは選択関数について得られた知見を述べる。本研究における選択関数とは、すべての半閉部分空間の各々から Hilbert ノルムを１つづつ選んでくることであるが、これは、各半閉部分空間に対し、それを値域とする正値有界作用素を１つづつ選んでくることと同値である。選択したすべての正値有界作用素の集合とそれらの平方根の集合が一致しているという（複数あるうちの１つの）仮定を設定して議論していたが、そのような仮定条件を満たす選択関数は存在しないということが、1971 年の P.A.Fillmore and J.P.Williams の結果を用いて示されることが判明した。従って、その仮定を緩和した代替条件を考えることになる。

次に、半閉部分空間に関連する成果を述べる。選択関数を与えると、半閉部分空間を値域とする正値有界作用素があらかじめ指定されることを意味し、それに基づいて距離関数も定義されるため、指定された以外の正値有界作用素を扱う場合は距離の計算などに不便さが生じる。そこで選択関数に依存しない概念の導入として、１つの半閉部分空間の p 冪（$0 < p < 1$）を導入した。このことより閉部分空間とは、半閉部分空間のうち 1/2 冪で変化しない空間として特徴付けられる。さらに、２つの半閉部分空間に関する概念として、それらを結ぶ path というものを Uhlmann の補間的作用素平均を用いて導入した。この path も両端の半閉部分空間の正値有界作用素の値域表現に依存しないで定まる。この path を用いれば、p 冪とは半閉部分空間と全空間を補間的 p-幾何作用素平均で結んだ特別な path であると換言できることがわかった。また、２つの半閉部分空間がある有界作用素について不変であれば、それらの path 上にあるすべての半閉部分空間も不変であるという結果が得られた。

その他、２つの半閉部分空間を結ぶ path に対し、その path 上から２つの半閉部分空間を任意に選んで結んだ path は最初の path の部分 path になるかという問題については、p 冪という特別の path については成り立つが、一般にはわからないままである。

以上が本研究の主な成果であるが､path を用いることにより単調減少区間列構成のアルゴリズムを見出すところまでは到達しなかった。また、「２．研究の目的」の最後の部分で、‘ 無限性 ’ という困難に対する対処法の有効性の成否を問う意図も含まれている、と書いたが、最大の目標が達成できていないため、成否については現時点では何とも言えない状況である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　0　件）
〔学会発表〕（計　2　件）
（１）　平澤 剛，半閉部分空間の path について，第５回日立解析学セミナー，2018 年 3 月
（２）平澤 剛，　Some problems for semiclosed subspaces in a Hilbert space, RIMS（京都大学数理解析研究所）共同研究（公開型）2019 年 1 月