

令和元年6月17日現在

機関番号：13901

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K13762

研究課題名(和文) 相互情報量に基づく自由独立性へのアプローチ

研究課題名(英文) An approach to free independence based on mutual information

研究代表者

植田 好道 (UEDA, Yoshimichi)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：00314724

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題は自由確率論に於いてもっとも重要な概念である自由独立性のより深い理解を目指し、相互情報量というべきものの本格的な理論構築を目指す端緒を切り開くことを目指した。すでに自由確率版相互情報量と呼ぶべきものはVoiculescuにより1999年に導入されたものと日合・宮本両氏と私で2009年に導入したものが知られていたが、それらの相互関係も含め多くのことが手付かずで、提案と基本的性質の確立に留まっていた。本研究課題は、ある問題点を指摘する論文を公表し、matrix liberation processと私が呼ぶ行列値確率過程を導入し、その大偏差原理を相互情報量理論構築を念頭に論じた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

自由確率論はある作用素環の理解を目指して開発された純粋数学理論であったが、ランダム行列理論との深い関連が明らかになり、作用素環論に留まらず、移動体通信等の工学分野の研究でも利用されるようになった。このことから、直接的な社会的意義は既に明確である。他方で、自由確率論の最大の特性は自由独立性の概念であり、応用する際も何らかの形で自由独立性の概念に基づいていることを考えると、その基礎理論の構築の価値は明白であろう。しかし、まだその理解は初歩的レベルに留まっていると云わざるを得ない。自由独立性の深い理解を目指し、相互情報量の理論の構築を試みることの価値は明白である。

研究成果の概要(英文)：This research aimed at developing a theory of mutual information in free probability theory to understand the so-called free independence, the central concept of free probability theory. Two kinds of free probabilistic mutual information have been known so far; one is due to Voiculescu in 1999 and the other is due to Hiai, Miyamoto and myself in 2009. However, only a little about them, including their relationship, is known. In this research program, I first wrote a short note indicating an issue that I think is of importance, and then studied the question of large deviations for the matrix liberation process that I introduced as a key to develop the theory of free probabilistic mutual information.

研究分野：作用素環論，確率論

キーワード：自由独立性 エントロピー 相互情報量 ランダム行列 作用素環

1. 研究開始当初の背景

Voiculescu 氏が始めた自由確率論の最大の特徴は自由独立性である。自由独立性が独立性の単なる類似物に留まれば深い理論ではないと思うが、フォック空間とガウス系の深い関係に基づく視点に加えて、ランダム行列理論との本質的な関連によりその価値は明確になった。元はある特定の作用素環の構造解析に資することを目的にした理論であったが、ランダム行列の「極限」を捕まえる適切な枠組みである故に、作用素環論を超えた理論となっている。すなわち、現在の自由確率論では作用素環は研究対象ではなく研究の道具の一つでしかない。ここで強調すべきなのは、ランダム行列理論との接点は自由独立性を通して生じ、またそこからある種の組合せ論的数え上げ問題にも深く関連することである。以上のように、自由独立性の重要性は明確であるが、通常の確率論との類似を超えた研究は極めて難しく、実は簡単に扱えないことばかりである。私見ではあるが、自由独立性の深い理解に向けた研究は、Speicher 氏に始まる組合せ論的構造の究明と Voiculescu 氏自身が始めたエントロピーの視点からのものに大別される。前者は代数的であるため非可換構造を比較的取り扱いやすく、かなり研究が進んだと言える。エントロピーの視点の研究(自由エントロピーの研究)は、結局のところ、深い通常の意味の確率論の問題と適切な非可換解析学の構築に帰着するというのが、少なくとも有力な研究者の間の共通認識であると思う。その研究は、確率論出身の有力研究者らを巻き込んで現在に至るが、組合せ論構造の究明と比較すると、進展はかなり遅く道半ばである。なお、非可換解析学というのは、非可換量に対する解析学のことであり、その取り扱いには組合せ論的構造の研究が一定の役割は果たすが、それだけではもちろん済まないことを強調しておく。

2. 研究の目的

現状では、自由エントロピー理論の研究に有力研究者たちの目が行くのは必然である。しかし敢えて先回りして、自由独立性に合う相互情報量の理論の構築を企てることにした。その理由は、確率論・情報理論の視点から見ると、独立性をより詳しく識別する量はエントロピーではなく相互情報量であること、および相互情報量は相対エントロピーに由来するものであるということである。自由確率論に於いて相対エントロピーがどうあるべきか? というのはかなりの難問で、私の知りうる限り、どうあるべきか誰もわかっていない。他方で、非可換特有の現象に由来した相互情報量の一つの提案が 1999 年に Voiculescu 氏により行われ、また別の提案が日合氏と宮本氏と私により 2009 年に行われた。それぞれある程度の基本的性質の解明は行われているが、それらの間の関係および関連するはずの確率論の研究はまったく手づかずであった。特に Voiculescu 氏のアプローチが純粋に非可換性に基づくものであり、通常の確率論にその類似を持たないことが、私に強い動機を与えた。しかし、どうも Voiculescu 氏の自由確率版相互情報量の企ては難しいと多くの研究者に考えられているようで、全く正しく理解されていない上に放置されている。以上から、本研究課題では、その本格的研究の端緒を切り開くのを本研究課題の目的と据えることにした。

3. 研究の方法

Voiculescu 氏による自由確率版相互情報量は liberation process と彼が呼ぶ非可換性に由来する非可換確率過程に基づいて定義される。自由エントロピーの研究では非可換確率変数とそれを近似するミクロ状態に相当する行列模型の確率論的考察が本質である。行列模型(ランダム行列)をミクロ状態、自由確率論の枠組みでの確率変数をマクロ状態と見なして、統計力学の真似を考えるのである。もちろん、当初からここまで明確ではなかったが、Voiculescu 氏自身の先駆的研究に加え、Guionnet 氏らの努力により、少なくとも哲学的には問題がかなり明瞭になっている。非可換性に基づく困難が本質的に現れるが、行列模型レベルでは通常の確率論の枠組みで議論できることを、具体的な成果とともに明らかにしたのは Guionnet 氏の大きな貢献である。すなわち、この問題の少なく見積もって半分は、通常の確率論の意味での大偏差原理の問題として完全に定式化される。ただこの設定で、完全な大偏差原理を確立するのは非可換性の困難により現状では難しい。私は、私の武器である作用素環論の手法に、彼女が切り開いた確率論からのアイデアを組み入れて、自由確率版相互情報量の理論構築を試みることにした。Guionnet 氏らが企てて来たことを相互情報量に対して考えようとする、liberation process の行列模型を導入することが必要である。これを実際に導入し、大偏差原理を論じ、必要な非可換確率解析理論の構築を企てる、というのが、本研究課題およびそれに引き続く研究の大雑把な青写真であった。私は作用素環論の専門家であり、確率論の専門家ではないことから、大偏差原理の一般理論および確率解析のある程度の知識の習得が必要と見込まれたが、幸いこの種の確率論はすでに十分発展して、取り組みやすい成書が多数あることから、本研究課題開始までに最低限の準備がほぼ整った。

4. 研究成果

Voiculescu 氏による自由確率版相互情報量と我々のその関係について、試金石と思われる一つの問題を定式化する短い論文を最初に公表し、素早く出版された。そこでは、問題を定式化するだけでなく、我々が導入した自由確率版相互情報量のある際立った性質の証明も与えてある。引き続き、liberation process の自然な行列模型と言える matrix liberation process と私が呼ぶ行列値確率過程を導入した。その行列サイズ無限大極限を捕まえる自然な枠組みを構築し、上からの大偏差評価を証明した。これは自由エントロピー理論での Guionnet 氏らの仕事から見て、少なくとも私には期待されたものであったが、彼女らが行列値ブラウン運動を扱ったのに対して、matrix liberation process がユニタリ行列値ブラウン運動に由来するために、技術的には新しいアイデアが必要だった。(大雑把には、ブラウン運動自体に対する結果を確率微分方程式から生じる拡散過程に一般化するという類の問題である。様々な不等式評価を新たに準備する必要があった。また、確率微分方程式の技術も本質的な役割を果たすはずだった。) 幸運にも、ある研究集会で聞いて以来、興味を持っていた 2 次元 Yang-Mills 測度の研究が参考になり、その仕事を深く検討することにより、必要な様々な不等式評価を証明して研究を進めることができた。続く自然な問題である下からの評価のためには、「非可換積分方程式」というべきものの解の一意性が必要になることが判明した。それに必要な理論の構築は中長期目標に据え、短期的には得られた速度関数(尺度関数というべきか?)の詳細な研究に力点を置き、結果として、その速度関数が一意的な最小点を持ち、その最小点が liberation process により他ならないことを明らかにした。以上の結果から、matrix liberation process の(適切に定式化された連続確率過程としての)行列サイズ無限大概収束性が従う。なお、時間を固定した概収束はすでにわかっていたが、連続確率過程としてのそれは本研究で初めて明らかになったことを指摘したい。以上の研究を論文にまとめて公表し、最近出版された。さらに研究を続け、Voiculescu 氏および我々の自由確率版相互情報量を統一理論に統合する試みの第一歩として、matrix liberation process に対する大偏差原理に対する縮約原理の適用可能性を調べた。具体的には時間無限大で縮約原理を適用したいのである。これは技術的な問題ではあるが、通常の大偏差原理の一般論には収まらない問題であった。これを解決するために、ユニタリ群上の熱核を調べ、試行錯誤の上、実際に可能であることを明らかにした。これを出発点に我々が導入した自由確率版相互情報量の定義に関わる基本問題の多くが matrix liberation process の大偏差原理の問題に帰着することを明らかにし、さらに縮約原理により得られる速度関数を研究した。応用として、新しい自由確率版相互情報量というべきものを導入し、その最低限の基本性質を確立した。以上の成果をごく最近、論文にまとめて、arXiv に公表した。さらに、引き続きどう言った理論を準備すべきかある程度明確になった。

以上が本研究課題の重要な研究成果であるが、代数的量子場理論への自由独立性の応用を Longo 氏、谷本氏との共著論文で与えた。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 3 件)

1. Roberto Longo, Yoh Tanimoto and Yoshimichi Ueda, Free products in AQFT, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), to appear. 査読有
2. Yoshimichi Ueda, Matrix liberation process I: Large deviation upper bound and almost sure convergence, J Theor Probab, Vol.32, No.2 (2019), 806--847. 査読有
3. Yoshimichi Ueda, A remark on orbital free entropy, Arch. Math., Vol.108, No.6 (2017), 629--638. 査読有

[学会発表](計 6 件)

1. Yoshimichi Ueda, Matrix liberation process, Free probability: the theory, its extensions, CRM Montreal, Mar. 8, 2019. 招待講演.
2. Yoshimichi Ueda, Analysis of pairs of projections in free probability, Workshop

"Noncommutative probability and related topics", 北海道大学, 2018 年 11 月 2 日. 招待講演 .

3. Yoshimichi Ueda, Matrix liberation process and free probabilistic mutual information, Seminar talk, Mathematical Institute, Harbin Institute of Technology, Aug. 17, 2018. 招待講演 .
4. Yoshimichi Ueda, Matrix liberation process and a free probability question, Workshop "Random Matrices and their applications", Kyoto university, May 22, 2018. 招待講演 .
5. 植田 好道, Matrix liberation process, 研究会「非可換確率論とその応用」お茶の水大学, 2017 年 12 月 6 日. 招待講演 .
6. Yoshimichi Ueda, Matrix liberation process, Workshop "Probabilistic techniques and Quantum Information Theory", IHP, Oct. 24, 2017. 招待講演 .

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~ueda/>

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。