様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ６ 月 ２６ 日現在

機関番号：１７３０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ１３７６５

研究課題名（和文）場の理論におけるパンルベ方程式の研究

研究課題名（英文）Study of Painleve equations by the field theory

研究代表者
村田　嘉弘（MURATA, Yoshihiro）

長崎大学・経済学部・教授

研究者番号：６０２１２２５５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：パンルベ方程式を統一的に研究するため、パンルベ方程式P_Jと同値な群対称反自己双対ヤンミルズ方程式である行列型パンルベ方程式（Matrix Painleve System）M(*)の解の変換群の構造の解明、古典解の意味付け等を第１目標として研究した。予定した初期の方法がうまくいかないため、別な考え方で次の結果を得た。(1)パンルベ方程式はそれ自体オイラー・ラグランジュ方程式である。また、そのラグランジアンを得た。(2)未解明であったP_6とM(1,1,1,1)との厳密な変換公式を得た。(1)はパンルベ方程式を物理的枠組みで研究する新しい研究の道を開く。(2)は第１目標を解決することに役立つ。

研究成果の学術的意義や社会的意義
パンルベ方程式は、新しい超越関数を発見しようという純粋に数学的関心のもと、1900年～1910年に発見された6つの複素常微分方程式である。その後、1980年代から2010年代にかけ、パンルベ方程式と物理的方程式との関係が次々に発見され、現在では、物理学へのより進んだ応用が期待されている。今回の研究成果は、パンルベ方程式そのものが物理的枠組みの中で把握できることを明確にしたものであり、また、パンルベ方程式の構造を詳細に解明するための手がかりとなるものである。その意味でパンルベ方程式研究の現在の期待に沿うものである。

研究成果の概要（英文）：In order to investigate Painleve equation P_J's systematically, we set the main goal to clarify the structure of transformation groups of solutions and classical solutions of Matrix Painleve System M(*)'s which are group symmetric Anti-Self-Dual Yang-Mills equations, where P_J and M(*) are transformed to each other. The initial plan to treat this problem has not gone well, and so we could not go further plans. But, by another approach, we have got another useful results to solve the main goal. (1) We proved that Painleve equations are themselves Euler-Lagrange equations and got Lagrangian L_J of P_J. (2) We got the strict formula of transformation between P_6 and M(1,1,1,1). This formula has been the only unknown formula between P_J and M(*).(1) will develop into the new study of Painleve equation from the dynamical system point of view. (2) will connect to the solution of the main goal.

研究分野：数物系科学

キーワード：パンルベ方程式　Euler-Lagrange 方程式　Lagrangian　行列型パンルベ方程式

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

パンルベ方程式の研究は、(1)パンルベ方程式そのものを直接研究する方法 [直接法]と、(2)パンルベ方程式を他の微分方程式との関連で研究する方法 [間接法] に２大別できると言える。研究開始当初は、[間接法]において代表的なものとして、Mason-Woodhouse の研究を筆者が再構築した群対称反自己双対ヤンミルズ方程式である「行列型パンルベ方程式（Matrix Painleve System：MPS）」の研究と、神保道夫氏による P_3 に関わるフェルミオン場の方程式（Dirac 方程式）の研究があった。MPS は元々ボソン場の方程式、Dirac 方程式はフェルミオン場の方程式であるため、パンルベ方程式を内包する微分方程式の物理的意味まで考えてパンルベ方程式を考察することが重要であると思われていた。

また、[直接法][間接法]を通じてパンルベ方程式そのものを解明しつつ、パンルベ方程式の応用、特に物理分野への応用が期待されるようになってきてもいた。

２．研究の目的

背景に述べたことを元に、特に[間接法]に注目し、パンルベ方程式が 2 種類の場の方程式に深く関わることと、それぞれで研究手法が異なることから、それぞれの手法での結果を比較することによりパンルベ方程式の構造について新たな知見を得ることを目標とした。また、超対称性まで考慮すれば、フェルミオンとボソンの入れ替えが可能となるので、パンルベ方程式を超対称性まで含めて考察することも目指した。

具体的に目標としたパンルベ方程式の解明すべき性質としては、行列型パンルベ方程式の解の変換群の構造、古典解の意味、既約な解の特徴付けに新たな知見を加えること、超対称性を付加した場の方程式でのパンルベ方程式の振る舞い（フェルミオンとボソンの入れ替えで、パンルベ方程式がパンルベ方程式それ自体に変換されるか）であった。

３．研究の方法

研究当初および研究中に考えたアプローチ法について、まず述べる。

(1) フェルミオン場の方程式と関連する形で「行列型第 2 パンルベ方程式（仮称）」を構成する。

(2) 「行列型パンルベ方程式（MPS）」と「行列型第 2 パンルベ方程式（仮称）」を比較することで、MPS における以下の未解決問題を解明する。
　・パンルベ方程式の解の変換群の構造を MPS の変換に根源を求め、説明する。

(3) 「行列型第 2 パンルベ方程式（仮称）」の解の変換群を求める。「行列型パンルベ方程式（MPS）」と「行列型第 2 パンルベ方程式（仮称）」よりパンルベ方程式の古典解、既約解の意味付けを考察する。

(4) 超対称性を入れた場の方程式を考え、「行列型パンルベ方程式（MPS）」と「行列型第 2 パンルベ方程式（仮称）」の直接的な変換を考える。

ところが、(1)のアプローチ方法が成功せず、「行列型第 2 パンルベ方程式（仮称）」を構築できなかった。そのため、「行列型第 2 パンルベ方程式（仮称）」の存在を仮定する(3)(4)は現時点では達成が見込めないことが明らかになった。そこで、当初の背景および目的にまで戻り、アプローチ方法を以下のように変更した。

(1') 物理的意味まで考えてパンルベ方程式を考察する。それにより、パンルベ方程式の応用可能性を広げる。

(2') パンルベ方程式と MPS のみにより、未解決問題
　・パンルベ方程式の解の変換群の構造を MPS の変換に根源を求め、説明する。
を解決する。そのために、未解決であり、かつ、最も重要な P_6 と MPS の M(1,1,1,1)との変換公式を求める。

また、(4)を研究する時に、英国 Oxford 大学の Mason 氏、Woodhouse 氏の研究協力を求める予定でいたが、(4)に進めないので渡英と両氏への研究協力を見合わせた。

４．研究成果

(1)　アプローチ方法(1')に対応する成果は以下の通りである。

定理（文献[1]）
パンルベ方程式は Euler-Lagrange 方程式である。
そのラグランジアンは以下の表１で与えられる。

表１

ラグランジアン L_J
$L_1=\frac{1}{2}(\dot{q})^2+2q^3+tq$

$L_2=\frac{1}{2}\left[\dot{q}-\left(q^2+\frac{t}{2}\right)\right]^2+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)q$
$L_{3'}=\frac{1}{4tq^2}\left[t\dot{q}+\left(\eta_\infty q^2+\theta_0 q-\eta_0 t\right)\right]^2-\frac{1}{2t}\eta_\infty\left(\theta_\infty+\theta_0\right)q$
$L_3=\frac{1}{4xQ^2}\left[x\dot{Q}+\left\{2\eta_\infty xQ^2+\left(2\theta_0+1\right)Q-2\eta_0 x\right\}\right]^2-2\eta_\infty\left(\theta_\infty+\theta_0\right)Q$
$L_4=\frac{1}{8q}\left[\dot{q}+\left(q^2+2tq+2\theta_0\right)\right]^2-\theta_\infty q$
$L_5=\frac{1}{4tq(q-1)^2}\left[t\dot{q}+\left\{\theta_1 q(q-1)+\theta_0(q-1)^2-\eta_1 tq\right\}\right]^2-\frac{1}{4t}\left\{(\theta_1+\theta_0)^2-\theta_\infty{}^2\right\}(q-1)$
$L_6=\frac{1}{4t(t-1)q(q-1)(q-t)}\left[t(t-1)\dot{q}+\{\theta_1 q(q-t)+\theta_0(q-1)(q-t)+(\theta_t-1)q(q-1)\}\right]^2$ $-\frac{1}{4t(t-1)}\left\{(\theta_1+\theta_0+\theta_t-1)^2-\theta_\infty{}^2\right\}(q-t)$

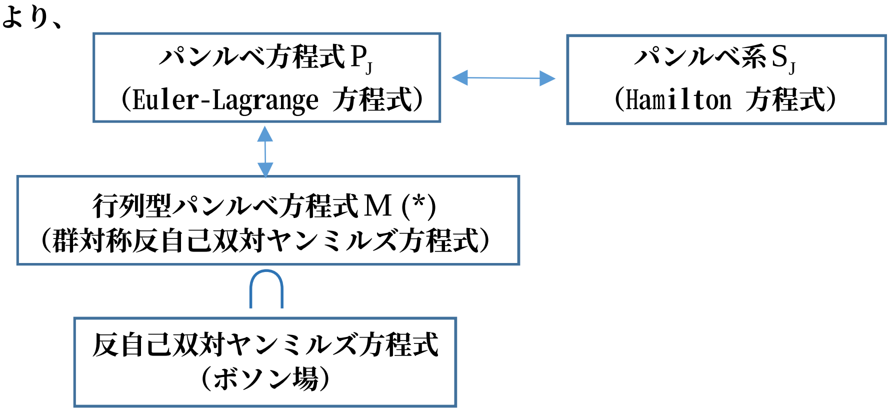
上表で、$L_{3'},L_3$ はそれぞれ、$\mathrm{P}_{3'}$, P_3 に対応するラグランジアンである。

（注意１）上表のラグランジアン L_J に対応するハミルトン関数 H_J とそのパンルベ系 $\mathrm{S_J}$ は下の文献[1][2]に示してある。$L_J=p\dot{q}-H_J,\ \hat{L}_J=p\dot{q}-H_J+dG(q,t)/dt$ は同一のパンルベ方程式 $\mathrm{P_J}$ のラグランジアンとなるが、H_J と $\hat{H}_J=H_J-dG(q,t)/dt$ の与えるパンルベ系 $\mathrm{S_J},\hat{\mathrm{S}}_\mathrm{J}$ は異なるものになる。例えば、岡本-梅村の $\hat{\mathrm{S}}_2$ は $\hat{L}_2=p\dot{q}-H_2+d\left(q^3/3+tq\right)/dt$、従って $\hat{H}_2=H_2-d\left(q^3/3+tq\right)/dt$ の場合である。

（注意２）０でない任意の定数 C に対し、$L_J=p\dot{q}-H_J,\ \hat{L}_J=C\left(p\dot{q}-H_J\right)$ は同一のパンルベ方程式 $\mathrm{P_J}$ のラグランジアンとなるが、H_J と $\hat{H}_J=CH_J$ の与えるパンルベ系 $\mathrm{S_J},\hat{\mathrm{S}}_\mathrm{J}$ は異なるものになる。例えば、梅村の $\hat{\mathrm{S}}_4$ は $\hat{L}_4=2\left(p\dot{q}-H_4\right)$、従って $\hat{H}_4=2H_4$ の場合である。

（注意３）古典力学において、$L=T-U$ （$T=T(\dot{q},q)$ は運動エネルギー、$U=U(q,t)$ はポテンシャルエネルギー）であるが、L_1,L_2 はそのような表示に近い。例えば、$L_1=\frac{1}{2}(\dot{q})^2-\left[-\left(2q^3+tq\right)\right]$ である。

この定理により、



となり、パンルベ方程式およびその同値な方程式をすべて物理学の枠組みの中で把握できるようになった。また、この結果は、次に研究すべき多くのことを暗示する結果でもある。

(2) アプローチ方法(2')に対応する成果は以下の通りである。

$\boxed{\text{定理}}$ (文献[2])

行列型パンルベ方程式(MPS)の M(1,1,1,1)とパンルベ第6方程式 $P_6(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ 、および、中間方程式 $T_{(y,h)}$ と $S_{(y,h)}$ を次の表2のように置く。

表2

M(1,1,1,1)	$\begin{cases} t\lambda' = \sigma\nu - \mu\tau \\ t\mu' = 2(\rho\mu - \lambda\sigma) \\ t\nu' = 2(\lambda\tau - \rho\nu) \end{cases} \begin{cases} (1-t)\rho' + \lambda' = 0 \\ (1-t)\sigma' + \mu' = 2k\sigma \\ (1-t)\tau' + \nu' = -2k\tau \end{cases} \begin{cases} l^2 = \lambda^2 + \mu\nu \\ m^2 = \rho^2 + \sigma\tau \\ n^2 = (k+\lambda+\rho)^2 + (\mu+\sigma)(\nu+\tau) \end{cases}$ ただし、k,l,m,n は定数
$T_{(y,h)}$	$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t(t-1)}\Big[2(y-t)(h-k)+(y-1)\Big] \\ h' = \dfrac{2y-y^2-t}{t(t-1)(y-1)}\Big[h^2-2kh\Big] - \dfrac{y-1}{t(t-1)}h - l^2\dfrac{y-1}{y^2(t-1)} - m^2\dfrac{y-1}{(y-t)^2} \\ \qquad +(n^2-k^2)\dfrac{1}{t(y-1)} \end{cases}$ ただし、k,l,m,n は定数
$S_{(y,h)}$	$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t(t-1)}\Big[2(y-t)(h-k)+(y-1)\Big] \\ h' = -\dfrac{2y-y^2-t}{t(t-1)(y-1)}\left[h^2-\dfrac{ht(t-1)}{y(y-t)}y'\right] + \dfrac{hy}{t(y-t)} - l^2\dfrac{y-1}{y^2(t-1)} - m^2\dfrac{y-1}{(y-t)^2} \\ \qquad +(n^2-k^2)\dfrac{1}{t(y-1)} \end{cases}$ ただし、k,l,m,n は定数
P_6	$y'' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y-1}+\dfrac{1}{y-t}\right)(y')^2 - \left(\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t-1}+\dfrac{1}{y-t}\right)y' + \dfrac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2}\left[\alpha+\beta\dfrac{t}{y^2}+\gamma\dfrac{t-1}{(y-1)^2}+\delta\dfrac{t(t-1)}{(y-t)^2}\right]$ ただし、$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ は定数

このとき、次の表3のような変換により、互いに同値になる。

表3

M(1,1,1,1) ⇒ $T_{(y,h)}$	$\begin{cases} y = \dfrac{t\mu}{\mu-(t-1)\sigma} \\ h = -\dfrac{\lambda}{y} - \dfrac{\rho(1-t)}{y-t} \end{cases}$
$T_{(y,h)}$ ⇒ M(1,1,1,1)	$A = \dfrac{1}{2k}\left[\dfrac{hy}{y-1}\big\{h(y-t)+2k(t-1)\big\} - l^2\dfrac{t}{y} - m^2\dfrac{t(t-1)}{y-t} + (n^2-k^2)\dfrac{t-1}{y-1}\right]$ とおき、$\rho = \dfrac{y-t}{t(t-1)}A,\ \lambda = -hy + \dfrac{y}{t}A$

	$\sigma=\exp\left[2\int\frac{kt-yh}{t(1-t)}dt\right],\quad \mu=\frac{y(t-1)}{y-t}\sigma$ $\nu=\frac{l^2-\lambda^2}{\mu},\quad \tau=\frac{m^2-\rho^2}{\sigma}$ とおく。
$\mathrm{T}_{(y,h)}\Leftrightarrow\ \mathrm{S}_{(y,h)}$	第２番目の式の書き直し
$\mathrm{S}_{(y,h)}\ \Rightarrow\ \mathrm{P}_6$	(y,h) より、y だけの式に書き直す ただし、$\alpha=\frac{1}{2}(2k-1)^2,\beta=-2l^2,\gamma=2n^2,\delta=\frac{1}{2}(1-4m^2)$
$\mathrm{P}_6\ \Rightarrow\ \mathrm{S}_{(y,h)}$	$h=k+\frac{t(t-1)y'+y(1-y)}{2y(y-t)}$ おき、(y,h) の方程式にする。 (k,l,m,n) は $\alpha=\frac{1}{2}(2k-1)^2,\beta=-2l^2,\gamma=2n^2,\delta=\frac{1}{2}(1-4m^2)$ を満たすように定める。

この結果を用いた MPS の考察は文献[2]およびそれに続く論文にまとめる。

＜文献＞

[1] MURATA Yoshihiro, Lagrangians of Painleve equations, 長崎大学経済学部研究年報, 第36巻（2020年6月）,125-130.
[2] Yoshihiro Murata, Matrix Painleve Systems reduced from Anti-Self-Dual Yang-Mills equations, in preparation.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　0件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 MURATA　Yoshihiro	４．巻 第36巻
２．論文標題 Lagrangians of Painleve equations	５．発行年 2020年
３．雑誌名 長崎大学経済学部研究年報	６．最初と最後の頁 125-130
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 ―

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

―

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考