

令和元年5月26日現在

機関番号：32612

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K13766

研究課題名（和文）無限大不変測度を持つエルゴード的変換の多重再帰性とエルデシ予想

研究課題名（英文）On the multiple recurrence of infinite measure preserving transformations and a conjecture by Erdos

研究代表者

仲田 均 (Nakada, Hitoshi)

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・名誉教授

研究者番号：40118980

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,900,000円

研究成果の概要（和文）：自然数の部分列に対してその逆数の和が発散するとき、その中に任意の長さの等差数列が存在するというエルデシの未解決予想の解決を目指して、エルゴード理論からどのようにアプローチできるかを研究した。この問題のためには、古典的なエルゴード的変換の多重再帰性ではなく無限大の不変測度を持つエルゴード的変換の多重再帰性を考える必要がある。本研究ではこの観点から無限大不変測度を持つエルゴード的変換の研究を行い、Rauzy induction の自然拡大、cylinder flow に関する極限定理について新しい結果を得た。更に、多重再帰性について、特別な性質を持つエルゴード的変換の存在を示すことに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

等差数列に関するエルデシ予想は21世紀に入り、Green-Taoにより素数列に関しては解決されたものの、本来の問題は依然として未解決の難問である。本課題では、この問題解決への一つのアプローチとして1970年代に H. Furstenberg により提案された方法の厳密な正しさを証明することを意識しながら infinite ergodic theory を研究した。infinite ergodic theory の多重再帰性に関する研究の進展はエルデシ予想の解決に向けた一つの大きな可能性を持つもので、そこに本研究の学術的意義が見いだされる。

研究成果の概要（英文）：We consider the following the long standing open question which is called the Erdos conjecture for arithmetic progressions : Suppose that  $(a_n)$  is a sub-sequence of natural numbers such that the sum of the inverse  $1/a_n$  diverges. Then for any natural number  $k$ , there exists an arithmetic progression of length  $k$  in  $(a_n)$ . The aim of this research is to find a way to solve this conjecture from infinite ergodic theory. In this point of view, we got the following results. (1) We constructed the natural extension of the Rauzy induction as a map on the set of translation surfaces. (2) We have some limit theorems for cylinder flows.

Moreover we constructed an infinite measure preserving transformations which has a restricted multiplicity of recurrence.

研究分野：数理解析学

キーワード：エルゴード理論 無限大不変測度 等差数列のエルデシ予想

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

自然数の部分列が正の密度を持つとき、その中に任意の長さの等差数列が存在することが 1970 年代に E. Szemerédi により証明された。その後、H. Furstenberg は確率不変測度を持つ変換の多重再帰性定理を証明し、その定理が Szemerédi の結果と同値であることも併せて証明した。ここで多重再帰性とは、任意の正の測度を持つ事象と自然数  $k$  に対してその事象がある同じ時間間隔で  $k$  回続けて起こるとい性質である。多重再帰定理の確立以降、すべてのエルゴード的変換に対して「何らかの性質」が成り立つことと自然数の部分列の性質が対応付けられる、という考え方で多くの研究が行われるようになった。この考え方は現在では Furstenberg correspondence と呼ばれており、Ergodic Ramsey 理論として現代エルゴード理論の大きな一分野として 21 世紀に至るまでに大きく発展している。たとえば、1980 年代には J. Bourgain は「部分列に沿った Cesaro mean の極限がすべてのエルゴード的変換と“可測関数”に対して成立する」あるいは「どのようなエルゴード的変換に対しても部分列に沿った Cesaro mean の極限が存在しない“可測関数”がある」という性質により、自然数の部分列に対して universally good, universally bad という概念を定義し、多くの列の分類を行った。ここで考える可測関数をどの関数空間に設定するかにより universal な性質が異なることも同時に示している。また、V. Bergelson は多重再帰性定理の時間間隔を多項式  $P$  に対して  $P(n)$  とすることで多項式多重再帰性定理を示した。これらの結果はその後多くの研究者により拡張された。最近では古典的な Wiener-Wintner 定理の部分列に対する成立の可否などにまで及んでいる。21 世紀に入って、Szemerédi の定理の量的評価が T. Gowers により得られた。また、Furstenberg のアイデアの延長線上の方法論を用いて B. Green と T. Tao は「任意の長さの等差数列が素数のみにより実現出来る」という Erdős-Turan 予想の解決に成功した。これらの研究の進展が見られた背景には、Gowers の導入した有限数列上の一様セミノルムの概念がある。これを関数空間に広げる広げることにより関数解析的手法を用いて、B. Host と B. Kra、あるいは、T. Ziegler により非伝統的エルゴード定理が証明された。これらの研究の流れの中で、エルゴード的変換に対してその nil factor が多重再帰性多項式再帰性などの性質を決定づけていることが明らかにされた。しかし、密度 0 の問題、とりわけ「逆数の和が発散するような自然数の部分列の中に任意の長さの等差数列が存在する」というエルデシ予想の解決には依然として解決されていない。

### 2. 研究の目的

1970 年後半から Furstenberg, Bourgain 達により始められた Ergodic Ramsey 理論で捉えきれない問題を、無限大不変測度を持つエルゴード理論の研究によりブレークスルーすることを目的とする。この研究テーマは 1970 年代に Furstenberg が挑戦しているが、その当時のエルゴード理論ではまだ未解明の問題が多かったため不首尾に終わった。その後研究代表者と Tel Aviv 大学の Jon Aaronson がマルコフシフトに対して行った共同研究(2000 年)を除いては、ほとんど手つかずの分野である。そこで本研究では、等差数列に関するエルデシ予想をエルゴード理論からのアプローチを行うことを目標に、そのための無限大不変測度を持つエルゴード的変換のあらたな理論構築をめざした。とりわけ、エルデシ予想の解決のための手掛かりとして無限大不変測度を持つエルゴード的変換の再帰性の速さと多重再帰性の問題を研究することでエルデシ予想に対応するエルゴード理論としての命題を明確にすることをスタート地点として、エルデシ予想の解決までの距離を徐々に狭めていくことでエルデシ予想、無限大不変測度を持つ変換のエルゴード理論の新たな相互研究を発展させることを目標とした。

### 3. 研究の方法

まず Ergodic Ramsey 理論のこれまでの研究過程を検討することから始めた。非伝統的エルゴード理論の証明に潜む nil sequence と呼ばれる数列の Furstenberg correspondence に果たす役割が無限大不変測度を持つエルゴード理論に適用可能かを意識しつつ、最新のこの分野の進展状況をまとめ上げた。これを基にして、これまでに知られている無限大不変測度を持つエルゴード的変換のタイプを分類し、構成すべき例がどのような形で実現可能かを吟味した。特に、cutting and stacking の方法によるエルゴード的変換の構成を軸に研究を行った。また、マルコフ連鎖(ランダムウォーク)、シリンダーフロー、ではなぜ多重再帰性が保証されるのかを確率論、数論両方の立場から検討することでこれらの変換のエルゴード理論的性質の研究を行った。一方、エルデシ予想と  $1/n$ -conservative の問題については背理法によるアプローチがもっとも自然な第一歩と思われるため、それによる問題解決を試みた。また、研究の第一歩としては、いきなり多重再帰性の研究に着手するのではなく、二重再帰性の成立の十分条件の検討から始める。そこで、cutting and stacking と呼ばれるエルゴード的変換の一般的な構成方法を用いて、妥当と判断できるような条件を決め、その方法でどこまで本質に迫れるかを確認し、一般に同値性が正しくないときに何が問題となるかの検討を行った。

これらの研究の進展の過程において、関連分野が多く研究されているイスラエルを訪問し、Tel Aviv 大 Jon Aaronson 教授、Weizmann 研究所 Omri Sarig 教授、Benjamin Weiss 教授らと研究討論ならびに研究情報の交換を行った。また、イスラエルからの研究者招聘も行った。さらに、数論的側面の研究のため、Paris 第 7 大学 Valerie Berthe CNRS 上級研究員、Delft 工科大学 Cor Kraaikamp 准教授との研究討論も行った。

#### 4. 研究成果

(1) 過去の研究のさまざまな結果を整理することにより、Ergodic Ramsey 理論に関する展望を得ることができた。また、イスラエルの研究者との研究情報交換により、無限大不変測度を持つエルゴード的変換の多重再帰性が変換の拡大により伝播することに関する Ben-Gurion 大学 T. Meyerovitch 教授の未発表の研究成果についての貴重な情報を得ることができた。これは本研究の基盤として重要であり、得られた知見は下記の学会等発表の で講演を行った。さらに無限大不変測度を持つエルゴード理論の研究からの視点を交えて、下記の学会等発表の で講演を行った。

(2) 過去の様々な研究結果を精査することにより、 $1/n$ -conservative で、かつ多重再帰的でないエルゴード的変換が存在すればエルデシ予想は正しくないことが証明できることが改めて確認された。一方、 $1/n$ -conservative なエルゴード的変換がすべて多重再帰的であればエルデシ予想が正しいかどうかは、まだ未解決の問題である。しかし今回の研究によりその証明の困難さのポイントとなる数列に関する性質を絞り込むことに成功した。

(3) 多重再帰性の多重度の問題と Kakutani タイプ ( $\alpha$ -タイプ;  $0 < \alpha < 1$ ) との関連について結果を得ることに成功した。とりわけ Kakutani タイプの値が多重度を下から評価できることを示すことができた。また、その評価が最良のものであること、Kakutani タイプから多重再帰性についてそれ以上の情報が得られないことも証明することができた。この成果はアメリカの無限大不変測度を持つエルゴード的変換の研究の第一人者である Williams College の Cesar Silva 教授のこれまでの研究成果と深い関係があることが判明し、今後、同教授と共同で研究を継続することについて合意した。

(4) Jon Aaronson 教授との研究討論の成果として  $1/n$ -conservative なエルゴード的変換の典型である cylinder flow について回転数が有界型である場合に 再帰時間が  $n/(\log n)$  であることの証明に成功した。ここで回転数が有界型とは無理数で、なおかつ、その連分数展開係数が有界であることである。この結果は従来、回転数が 2 次の無理数の場合にのみ証明されていたが、今回の研究ではランダムな行列の積に関する固有ベクトルの挙動に関して新しいアイデアを用いることで、従来知られていた方法では得られなかった結果を得ることに成功した。この研究成果は、Jon Aaronson と Michael Bromberg との共著論文として下記発表論文 に出版されている。この問題は一般の無理数を回転数に持つ cylinder flow について成立するかについては不明であるが、今回の研究過程でそうならない場合が存在することが予想されている。

(5) 無限大不変測度を持つエルゴード的変換の中でも平坦面の幾何学との関わり合いにおいて重要な意味を持つ Rauzy induction の natural extension の逆写像を Cruz-daRocha のアイデアに基づいて研究した。この研究は 2 対 1 の写像である Rauzy induction を今回の研究対象となる 1 対 1 のエルゴード的変換に拡張するためのものであったが、研究の副産物として translation surface とよばれる平坦面の新たな構成法を見出すことになった。実際、自然数を成分に持つ有限ベクトルを任意に与えた場合、それを特異点指数として持つ flat surface がこの構成方法により構成できることが示された。また、この研究成果は井上賀絵との共同研究として下記発表論文 に出版されている。ここで得られた 1 対 1 のエルゴード的変換の多重再帰性の重複度を確定することを始めとして様々なエルゴード理論的性質を明らかにすることは今後の研究課題となる。

(6) 無限大不変測度を持つ 1 対 1 でないエルゴード的変換の重要な例として、加法的連分数変換として知られている Farey map の複素数への拡張とそこから 1 対 1 写像を構成する研究を行った。この問題ではフラクタ集合の解析が必要となり、多くの数学的問題がまだ解明されていない。現段階では、有限不変測度を持つ乗法的連分数変換から 1 対 1 写像を構成することに成功した。また、このような複素連分数変換は展開係数の属する体がユークリッド的虚二次体の場合に限ることが証明された。この研究成果の一部は江居宏美、伊藤俊次、夏井利恵との共同研究として、発表論文 に出版されている。残りの部分については江居宏美、夏井利恵と共に現在論文を執筆中である。加法的連分数写像への拡張とその多重再帰性についてが、今後の研究課題となる。

(7) マルコフ連鎖の多重再帰性について、古典的な等間隔の多重再帰性以外の再帰性について Jon Aaronson と共同研究を行った。過去の研究における方法論を詳細に吟味し、その方法でどのような再帰性の成立が証明できるかを研究した。その結果として多項式間隔など他の多重再帰性についても、過去の証明法を改良することで幾つかの新しい性質を証明できることが確認された。証明のアイデアは時間間隔の一定性を時間間隔のパターンとして捉えなすことでこれまでの証明を一般化することである。また、負曲率コンパクト面の  $Z$ -cover 上の測地流に関してもこの方法論で多重再帰性の議論を一般化できるかについても研究を行った。この成果は、更に新たな ergodic Ramsey 理論との結びつきを明らかにするために現在も研究を継続中である。

## 5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 3 件)

Hiromo Ei, Shunji Ito, Hitoshi Nakada, Rie Natsui,  
On the construction of the natural extension of the Hurwitz complex continued fraction map. Monatsh. Math. 査読あり 188 (2019), no. 1, 37-86.  
doi.org/10.1007/s00605-018-1229-0

Kae Inoue, Hitoshi Nakada,  
A piecewise rotation of the circle, IPR maps and their connection with translation surfaces. Ergodic theory and dynamical systems in their interactions with arithmetics and combinatorics, 査読あり Lecture Notes in Math. 2213 (2018) 393-431, Springer, Cham.  
doi.org/10.1007/978-3-319-74908-2\_19

Jon Aaronson, Michael Bromberg, Hitoshi Nakada,  
Discrepancy skew products and affine random walks. Israel J. Math. 査読あり 221 (2017), no. 2, 973-1010.  
doi.org/10.1007/s11856-017-1560-5

[学会発表](計 12 件)

Hitoshi Nakada,  
On the notions of suborbital graph and geodesic continued fractions for an imaginary quadratic field,  
FWF/JSPS Meeting at St. Virgil, 2019 年 (Salzburg, Austria)

Hitoshi Nakada,  
Ergodic Theory of complex continued fraction maps,  
60 years of dynamics and number expansions, 2018 年 (Pisa, Italy)

Hitoshi Nakada,  
On the Construction of Translation Surfaces from Piecewise Rotation Maps of the Circle,  
The 12<sup>th</sup> AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications  
2018 年 (Taipei, Taiwan)

Hitoshi Nakada,  
The visits to zero of a cylinder flow,  
FWF/JSPS Meeting at St. Virgil, 2018 年 (Salzburg, Austria)

Hitoshi Nakada,  
On the construction of translation surfaces based on the idea by Cruz and da Rocha,  
Infinite Ergodic Theory and Related Fields at Hebrew University 2018 年 (Jerusalem, Israel)

Hitoshi Nakada,  
On Cruz and da Rocha ' s idea for a piecewise rotation map of the circle and its application,  
Zero Entropy System, 2017 年 (Marseilles, France)

Hitoshi Nakada,  
A construction of translation surfaces based on Cruz and da Rocha ' s idea,  
Aperiodic patterns in Crystals, Numbers and Symbols 2017 年 (Leiden, The Netherlands)

Hitoshi Nakada,  
On Cruz and da Rocha ' s induction for piecewise rotation maps of the circle as the dual of Rauzy induction,  
Modern Problems of Dynamical Systems and Their Applications, 2017 年 (Tashkent, Uzbekistan)

Hitoshi Nakada,  
Extended Rauzy induction の引き起こす Rauzy classes の間の transition について,  
数論とエルゴード理論 2017 年 (石川県金沢市)

Hitoshi Nakada,

On the natural extensions some complex continued fraction transformations,  
Ergodic Theory and its Connections with Arithmetic and Combinatorics, 2016 年 (Marseilles,  
France)

Hitoshi Nakada,

Basic ideas in infinite ergodic theory (I), (II), (III),  
エルゴード理論の最近の発展 2016 年 (京都府京都市)

Hitoshi Nakada,

Szemerédi の定理と展望 1, 2,  
2016 年度八王子数論セミナー 2016 年 (東京都八王子市)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

特になし

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

なし

### (2) 研究協力者

海外研究協力者氏名: Jon Aaronson

所属研究機関: Tel Aviv University

所属部局: Faculty of Exact Sciences

職名: Professor

海外研究協力者氏名: Omri Sarig

所属研究機関: Weizmann Institute of Science

所属部局: Faculty of Mathematics and Computer Science

職名: Professor

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。