

令和元年6月4日現在

機関番号：12608

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K13769

研究課題名(和文) 発展方程式における移動特異点の解析

研究課題名(英文) Analysis on moving singularities in evolution equations

研究代表者

柳田 英二 (YANAGIDA, Eiji)

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号：80174548

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究計画では、線形および非線形の放物型方程式に対する動的特異点を持つ解の存在と、その形状およびダイナミクスについての研究を進めた。具体的には、藤田方程式、吸収型方程式、動的ポテンシャルを持つ線形熱方程式、特異拡散方程式などを対象とし、特異解が存在するための条件と特異点近くでの漸近のプロファイルについて調べた。これにより、非線形項の臨界指数の存在と特異点の挙動のヘルダー指数の重要性が示された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

特異点の研究は古くからあり、特に非線形楕円型偏微分方程式の研究はかなり進んでいる。しかしながら、放物型偏微分方程式における移動特異点は、数学的には自然な対象であるにもかかわらず、研究はまだ始まったばかりである。この計画で得られた成果は今後の移動特異点理論の基礎となるものであり、偏微分方程式論や幾何学への応用も含めて、今後さらに発展するものと期待される。

研究成果の概要(英文)：In this project, we study the existence of solutions with moving singularities for some linear and nonlinear partial differential equations, and examine the profile and dynamics of such solutions. More specifically, for the Fujita equation, the absorption equation, the linear heat equation with a dynamic potential, and a singular diffusion equations, and investigate the conditions for the existence of singular solutions and asymptotic profile near singularities. By these studies, it is shown that the importance of some critical exponents and the Holder exponent of the motion of the singularity are crucial.

研究分野：放物型偏微分方程式に対する非線形解析

キーワード：発展方程式 偏微分方程式 特異点 非線形解析 臨界指数 分岐

1. 研究開始当初の背景

偏微分方程式の解が空間内の1点を除いて定義されているとき、もしこの解が全空間で定義される解とこの点を除いて一致すれば、これを除去可能な特異点という。特異点の除去可能性については複素関数論や楕円型方程式の研究において多くの興味深い結果が知られている。

べき乗の形の非線形項を持つ優線形放物型偏微分方程式に対し、以前から特異性を持つ球対称定常解の存在が知られていたが、これは特異点を保持する解のもっとも簡単な例である。楕円型方程式に対する特異解の存在と非存在については1980年代から多くの研究がなされており、孤立特異点の除去可能性や、特異点の漸近形について詳しい性質が明らかにされている。

放物型方程式についての時空間領域における特異性については、放物型方程式に対する一般的な正則性条件が知られていたが、その数学的な意義は明らかでなかった。また、線形の熱方程式には特異点を保持するような弱解が存在しないことや、藤田型方程式のような優線形偏微分方程式においては、有限時間における特異性の発現(爆発)に興味が集まっていたこともあり、放物型方程式の移動特異点についての研究は、大きな流れとはなっていなかった。

一方、数年前より、研究代表者とそのグループは、ある種の放物型方程式に対する移動特異点を持つ解の性質について調べ、以下のようなことを示した。

(1) 移動特異点を持つ解の存在は非線形に依存し、特にべき乗の形の非線形項を持つときには臨界指数が現れる。

(2) 特異性の強さは方程式の形によって異なるが、線形項が支配的になる場合と、非線形項が影響を及ぼす場合とでは強さが異なる。

(3) 特異点が滑らかに動く場合には特異点における解の漸近形の主要項は時間とともに変化しないが、特異点の位置が急激な変化をする場合には、主要項のオーダーや形状が変化する。

このように、移動特異点には著しい数学的構造が隠れていることが示唆され、基礎理論的にも定性理論的にもその詳細な性質の解明が望まれていた。

2. 研究の目的

以上のような状況のもとで、本研究では各種の放物型偏微分方程式に対し、移動特異点を保持する解が存在するための条件を探るとともに、特異点の持つ幾何学的な性質を調べることを目的とした。これにより、解の特異性に対する数学的理解が深まるとともに、解析学に新たな研究分野が開かれることが期待される。

本計画においては、移動特異点を持つ解の存在を考慮に入れて、特異点が除去可能であるための条件を明らかにし、また除去不可能な特異点の漸近的性質の解明をしたい。そのためには、時間とともに変化し得る特異点の動きが特異点の性質に与える影響を評価する必要があり、その解析には従来の手法のみでは不十分であり、移動特異点の性質を考慮した新たな技法の開発を必要とする。そこで、摂動論をさらに発展させるとともに、分岐理論、力学系理論、エネルギー法などと組み合わせた解析手法の確立も目的の一つである。これにより、特異点の除去可能性および、移動特異点の解析的、幾何学的な性質を明らかにしたい。

3. 研究の方法

特異性と非線形性の相互作用によって生じる特殊な構造を考慮に入れて、標準的な偏微分方程式に対する関数解析的手法を修正した新しい手法を試みた。これにより、移動特異点の性質を詳しく調べて、発展方程式における特異性保持のメカニズムを調べることが可能となる。また、これまでに研究対象となっていなかった、非線形性によって自律的に保持される特異点について詳細な解析を行った。

各種の偏微分方程式に対し、(必ずしも移動しない)特異点を持つ解の存在について理解しておくことも重要であり、まず、どのような方程式が移動特異点の問題に相当であるかを調べた。次に、いくつかの具体例について移動特異点の解析を行い、移動特異点について統一的な視点からその本質を明らかにした。

以上の計画を遂行するために、各方程式に対する国内外の協力者との連携を深め、組織的に研究を進めた。

4. 研究成果

期間中に得られた主な研究成果は以下の通りである。

(1) 藤田型方程式のようなべき乗の形の非線形項を含む方程式

べき乗型非線形項を持つ半線形放物型方程式に対し、動的特異点を持つ解の存在とその漸近挙動について研究を行った。非線形項が湧き出し型の場合には、べきに対する条件の下、動的特異

点が孤立点となる解の存在を示すとともに、高次元特異集合を持つ解の存在条件を明らかにした。吸収型の非線形項の場合には、超曲面上に動的特異点を持つ解を構成し、特異点近傍の漸近挙動を明らかにした。さらに、より一般の非線形項を含む方程式についても、同様の構造を持つための漸近的条件を明らかにした。いずれの場合にも、高次元特異集合および境界特異集合を含む場合への拡張を試みた。

(2) 逆可積分条件を満たす非線形項を持つ方程式

非線形項が Osserman 条件と呼ばれる積分条件を満たすとき、放物型偏微分方程式には large solution と呼ばれる境界で発散する解が存在することは以前から知られていたが、ここでは境界が時間とともに変化するときにも同様の解が存在するかどうかについて研究を進めた。その結果、境界が時間的、空間的に滑らかな場合には確かにこのような解は存在し、境界付近の漸近挙動は境界の曲率と法線速度に依存することを明らかにした。また、最小解の存在定理を確立した。

(3) 動的な Hardy ポテンシャルを持つ方程式

Hardy型ポテンシャルを持つ線形拡散方程式の特異解の存在について大きな進展があった。より具体的には、逆2乗の特異なポテンシャル項を含む放物型方程式について、特異解が存在するための最適な条件を明らかにし、また特異性の強さが異なる2種類のタイプに分類されることを明らかにした。これらの解はそれぞれ一意的であり、適切性についても同様の結果が得られることを示した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計8件) すべて査読有

1. K. Nagahara and E. Yanagida, Maximization of the total population in a reaction-diffusion model with logistic growth, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **57** (2018), Art. 80, 14 pp., <https://doi.org/10.1007/s00526-018-1353-7>
2. M. Shimojo, P. Takac and E. Yanagida, Asymptotic behavior of solutions to the logarithmic diffusion equation with a linear source, *Math. Ann.* **372** (2018), 429-449, <https://doi.org/10.1007/s00208-017-1604-5>
3. K. P. P. Htoo, J. Takahashi and E. Yanagida, Higher dimensional moving singularities in a superlinear parabolic equation, *J. Evol. Equ.* **18** (2018), 1575-1593. <https://doi.org/10.1007/s00028-018-0452-4>
4. K. P. P. Htoo and E. Yanagida, Singular solutions of a superlinear parabolic equation with homogeneous Neumann boundary conditions, *Nonlinear Anal.* **151** (2017), 96-108, <https://doi.org/10.1016/j.na.2016.11.015>
5. T. Kan and J. Takahashi, Time-dependent singularities in semilinear parabolic equations: Existence of solutions, *J. Differential Equations* **263** (2017), Issue 10, 6384-6426, DOI : 10.1016/j.jde.2017.07.016
6. M. Hoshino and E. Yanagida, Convergence rate to singular steady states in a semilinear parabolic equation, *Nonlinear Anal.* **131** (2016), 98-111, <http://doi.org/10.1016/j.na.2015.06.020>
7. J. Takahashi and E. Yanagida, Time-dependent singularities for a semilinear parabolic equation with absorption, *Commun. Contemp. Math.* **18** (2016), 1550077-1 - 1550077-27, <http://dx.doi.org/10.1142/S0219199715500777>
8. J.-L. Chern and E. Yanagida, Singular solutions of the scalar field equation with a critical exponent, *Springer Pro. Math. Stat.* **176** (2016), 277-288, DOI : 10.1007/978-3-319-41538-3_16

[学会発表] (計16件)

1. 柳田英二, Singular solutions of nonlinear elliptic equations with potential, 四ツ谷晶二先生ご退職記念研究集会, 龍谷大学瀬田キャンパス, 滋賀県, 2019
2. E. Yanagida, Blow-up of sign-changing solutions for a one-dimensional nonlinear diffusion equation, International Workshop on Nonlinear PDEs 2018 in Okayama - In honor of Professor Ryuji Kajikiya on his sixtieth birthday -, Okayama International Center, Okayama, 2018
3. E. Yanagida, Dynamic singularities in parabolic partial differential equations, SEAMS SCHOOL 2018 on Partial Differential Equations and Their Applications, Mandalay University of Distance Education, Mandalay, Myanmar, 2018
4. 柳田英二, Dynamic singularities in some parabolic partial differential equations I & II, RIMS 研究集会 Reaction Diffusion Equations--Analysis of propagation phenomena and singularity and its application to sciences, Kyoto University, Kyoto, 2018

5. E. Yanagida, Maximization of the Total Population in a Reaction-Diffusion Model with Logistic Growth, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, SS17, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, 2018
6. E. Yanagida, Dynamics of Hot Spots in the One-Dimensional Logarithmic Diffusion Equation, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, SS47, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, 2018
7. E. Yanagida, Blow-up of sign-changing solutions for a one-dimensional nonlinear parabolic equations, Eighth Euro-Japanese Workshop on Blow-up, Tohoku University, Miyagi, 2018
8. 柳田英二, Sign-changing solutions for a one-dimensional semilinear parabolic problem, 東京大学数理科学研究科応用解析セミナー, 東京都, 2018
9. E. Yanagida, Moving singularities in some parabolic partial differential equations, Seminario CAPDE, Universidad de Chile, Santiago, Chile, 2017
10. E. Yanagida, Moving singularities in some parabolic partial differential equations, Equadiff 2017, Slovak University of Technology, Bratislava, Slovakia, 2017
11. E. Yanagida, Extinction of solutions of the logarithmic diffusion equation, 第34回九州における偏微分方程式研究集会, 九州大学西新プラザ, 福岡県, 2017
12. E. Yanagida, Long-time behavior of solutions of the Fisher-KPP equation for slowly decaying initial data, Mathematical Analysis on Nonlinear PDEs, Aoba Science Hall 2nd floor, Science Complex C, Tohoku University, Miyagi, 2017
13. E. Yanagida, Extinction profile of solutions of the logarithmic diffusion equation on \mathbb{R} , RIMS 研究集会『偏微分方程式の解の形状解析』, 京都大学数理解析研究所, 京都府, 2016
14. E. Yanagida, Removable and non-removable singularities in some parabolic equations, The 7th Pacific RIM Conference on Mathematics 2016, Seoul National University, Korea, 2016
15. E. Yanagida, Dynamics of solutions the Fisher -KPP equation for slowly decaying initial data, International Conference on Reaction-Diffusion Equations and Their Applications to the Life, Social and Physical Sciences, Institute for Mathematical Sciences, Renmin University of China, Beijing, China, 2016
16. 菅徹, 時間依存特異点をもつ半線形放物型方程式の解について, 応用解析研究会, 早稲田大学西早稲田キャンパス, 東京都, 2016

[その他]

ホームページ等: <http://www.math.titech.ac.jp/~yanagida/research.html>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名: 菅 徹 (平成 28 年度から平成 29 年度まで)

ローマ字氏名: KAN, Toru

所属研究機関名: 大阪府立大学

部局名: 理学研究科

職名: 准教授

研究者番号 (8 桁): 60647270

(2) 研究協力者

研究協力者氏名: キン ピュー ピュー トウ

ローマ字氏名: KHIN, Phyu Phyu Htoo

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。