

令和 2 年 6 月 3 日現在

機関番号：32689

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2019

課題番号：16K13771

研究課題名（和文）等式の枠組による零形式の時空大域的研究

研究課題名（英文）Study on null forms in global space-time in the framework of equalities

研究代表者

小澤 徹 (Ozawa, Tohru)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：70204196

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000円

研究成果の概要（和文）：零形式の時空大域的研究の根底を支える球面上への跡定理の安定性について、その双対性による特徴づけと最良不等式が得られた。ハーディーの不等式とレリッヒの不等式に対しては、等式の枠組みで定式化し、剰余項を明示するとともに、最良定数と最適化函数の直接的具体的な理解を呈示することができた。これは、従来の背理法やコンパクト性に基づく間接的な理解を一新する方法論であり、今後の発展に繋がるものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義  
零形式の時空大域的研究の基盤を揺ぎ無いものとするとともに、函数不等式の従来の理解を、不等式ではなく、等式の枠組みで具体的に与えることができた。

研究成果の概要（英文）：Stability of trace theorems on the sphere is studied as the most fundamental subject in the research of null forms in global space-time. We have established the desired optimal inequalities for the stability theory and given its characterization from the viewpoint of duality. Regarding the Hardy and Rellich inequalities, we have formulated their equality framework with explicit remainder terms, thereby we were able to recast the associated best constants and extremizers in a direct and explicit understanding. This provides a new method, independent of implicit arguments of contradiction and compactness.

研究分野：数学解析

キーワード：関数方程式 調和解析 実解析 変分解析

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

## 1. 研究開始当初の背景

量子場の理論体系には、対応する古典場の数学的基礎が本質的に重要であると主張し、理論的枠組を初めて構築したのは I.E. Segal(Ann. of Math., 1963)である。その理論は、非線型波動方程式や非線型シュレディンガー方程式の数学解析として、Strauss, Morawetz, 加藤敏夫, Ginibre, Velo 等の先駆的な研究を促し、現在では解析学の一大研究分野を形成している。

その発展の過程において、決定的な役割を担ったのは、調和解析との密接な関連である。特にストリッカーズ評価(Strichartz, DukeMath. J., 1977)が重要な源泉の一つである。ストリッカーズ評価は、非線型偏微分方程式のみならず量子力学の基礎理論にも革新的な進展をもたらし、調和解析の内在的理論体系にも強い影響を与えた。それは、ストリッカーズ評価とボホナー・リース予想や掛谷予想を始めとする様々な調和解析の未解決問題との関連が明らかになったという学問的な進歩の事例とともに、調和解析出身の J. Bourgain や T. Tao がストリッカーズ評価を踏まえた非線型分散方程式の研究でフィールズ賞を受賞(1994年、2006年)した事からも窺い知る事が出来る。

ストリッカーズ評価は本質的に線型不等式(一次不等式)であり、非線型偏微分方程式を自由場の摂動として論じる場合に適合するが、二次の相互作用の構造まで考慮する場合には双線型の解析的性質(特に有界性)を知る必要がある。これを初めて理論化したのは Klainerman と Mechedon の研究であり、現在の波動方程式の研究では零形式の理論と呼ばれる。

シュレディンガー方程式に対して零形式を定式化したのは T.Ozawa and Y.Tsutsumi, "Space-time estimates for null gauge forms and nonlinear Schrödinger equation", Differential and Integral Equations, 11(1998), 201-222, が最初であり、空間1次元の場合は特に時空大域的  $L^2=L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$  ノルムの等式の形で与えられる。この論文は長期に亙り注目されなかったが、最近になって調和解析の専門家に取り上げられるようになってきた(過去5年で15回引用)。2014年10月に1か月間当研究室に滞在した Chris Jeavons もそうした1人であり、Neal Bez と共に3人で議論や予備的計算を積み重ねた経緯がある。その頃、シュレディンガー型に関しては、J.Bennet, N.Bez, C.Jeavons, N.Pattakos, "On sharp bilinear Strichartz estimates of Ozawa-Tsutsumi type" (J. Math. Soc. Japan, 69 (2017), 459-476.)が既に完成しており、議論は波動方程式を主な対象とした。

以上が研究開始当初の背景であった。

本研究では、これらの結果を等式の枠組で理解するため、既に確立されている空間1次元の場合の多次元化を再検討する事により、剰余項を特定する事を当初の計画とした。

## 2. 研究の目的

零条件(null condition)を満たす特別な相互作用に付随する零形式の時空大域的性質(global properties of null forms in space-time)を振動(oscillation)と特異性(singularity)と直交性(orthogonality)をキーワードとして、多重フーリエ解析、熱流解析、運動論、変分解析の4つの立場から研究し、既存の理論を等式の枠組に書き換える事により、多重線型ストリッカーズ評価等の不等式を剰余項付きで与え、最良定数と最適化函数のクラスを直接的に特徴付け、一層深い理解を得るとともに、剰余項に潜む高次の零構造を見出す手掛りを探求するのが本研究の当初の目的である。これにより、高次の零条件を満たす特別な相互作用およびそのラグランジアン形式を見出し、スカラー場とゲージ場の新たな相互作用モデルの提案を目指す事も当初の計画とした。

## 3. 研究の方法

本研究の研究目的を達成するために、多重フーリエ解析、熱流解析、運動論、変分解析の4つの研究グループを構成し、独自の研究を推進すると共に、他の研究グループの対応する理論・方法論・研究成果を全体像として理解するための研究体制を整備した。その相互作用の場を早稲田大学理工学術院に設けた。海外共同研究者との共同研究を推進するため、必要に応じて相互の訪問・招聘を行った。他の研究分野の専門家を招聘し、専門知識の提供を受けると共に、本研究計画の進展中の研究に対する他分野からの意見を求め、本研究の研究成果の分野の垣根を越えた位置付けに積極的に取組んだ。本研究課題の中でも、殆んど手の付いていない個別テーマを選んで大学院生・若手研究者を共同研究に参加させ、そのテーマの将来の担い手となれるよう、次世代研究者の育成という視点も配慮しつつ、研究目的の具体的達成に向け組織的に取組んだ。

## 4. 研究成果

零形式の時空大域的研究について、振動と特異性と直交性をキーワードとして、多重フーリエ解析、熱流解析、運動論、変分解析それぞれの立場から取り組んだ。

多重ストリッカーズ評価に対しては、その最良定数と最適化函数のクラスを直接的に特徴付け、一段と深い理解を呈示した。

熱流解析では、プラスキャンブ・リーブの不等式の統一的証明に応用し、その有効性を示した。平滑化評価に対しては、位相函数に潜む運動論を抽出し、臨界的正則性における評価を確立した。

対数型シュレディンガー方程式、磁場における非線型シュレディンガー方程式、クローンエネルギーの問題に対し、新しい不等式を導入することにより、変分解析的理解を与えた。

零形式の時空大域的研究の根底を支える球面上への跡定理の安定性について、その双対性による特徴づけと最良不等式が得られた。

ハーディーの不等式とレリッヒの不等式に対しては、等式の枠組みで定式化し、剰余項を明示するとともに、最良定数と最適化函数の直接的具体的な理解を呈示することができた。

これらの研究成果は、20 編の学術論文としてまとめられ、国際的に評価の高い学術雑誌に掲載された。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計20件（うち査読付論文 20件 / うち国際共著 16件 / うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Bez Neal, Jeavons Chris, Ozawa Tohru, Sugimoto Mitsuru	4. 巻 28
2. 論文標題 Stability of Trace Theorems on the Sphere	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 The Journal of Geometric Analysis	6. 最初と最後の頁 1456 ~ 1476
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s12220-017-9870-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Machihara Shuji, Ozawa Tohru, Wadade Hidemitsu	4. 巻 286
2. 論文標題 Remarks on the Rellich inequality	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 1367 ~ 1373
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-016-1805-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Machihara Shuji, Ozawa Tohru, Wadade Hidemitsu	4. 巻 81
2. 論文標題 Remarks on the Hardy type inequalities with remainder terms in the framework of equalities	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Adv. Stud. Pure Math.	6. 最初と最後の頁 247 ~ 258
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/08110247	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Tanaka Kazunaga, Zhang Chengxiang	4. 巻 56
2. 論文標題 Multi-bump solutions for logarithmic Schrödinger equations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 No. 33, 35 pp.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00526-017-1122-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Cingolani Silvia, Jeanjean Louis, Tanaka Kazunaga	4. 巻 19
2. 論文標題 Multiple complex-valued solutions for nonlinear magnetic Schrödinger equations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Fixed Point Theory and Applications	6. 最初と最後の頁 37 ~ 66
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11784-016-0347-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Bez Neal, Cunanan Jayson, Lee Sanghyuk	4. 巻 50
2. 論文標題 Smoothing Estimates for the Kinetic Transport Equation at the Critical Regularity	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Mathematical Analysis	6. 最初と最後の頁 2280 ~ 2294
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/17M1148852	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 J. Bellazzini, M. Ghimenti, T. Ozawa	4. 巻 23
2. 論文標題 Sharp lower bounds for Coulomb energy	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Math. Research Letters	6. 最初と最後の頁 621-632
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="http://dx.doi.org/10.4310/MRL.2016.v23.n3.a2">http://dx.doi.org/10.4310/MRL.2016.v23.n3.a2</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Bennett Jonathan, Bez Neal, Cowling Michael G., Flock Taryn C.	4. 巻 49
2. 論文標題 Behaviour of the Brascamp-Lieb constant	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Bulletin of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 512 ~ 518
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/blms.12049	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Bennett Jonathan, Bez Neal, Flock Taryn C., Lee Sanghyuk	4. 巻 140
2. 論文標題 Stability of the Brascamp-Lieb constant and applications	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 American Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 543 ~ 569
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1353/ajm.2018.0013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Bennett Jonathan, Bez Nea, Guti¥'errez Susana, Lee Sanghyuk	4. 巻 114
2. 論文標題 Estimates for the kinetic transport equation in hyperbolic Sobolev spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal de Mathématiques Pures et Appliquées	6. 最初と最後の頁 1 ~ 28
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1016/j.matpur.2018.03.007">https://doi.org/10.1016/j.matpur.2018.03.007</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Bez Neal, Machihara Shuji, Ozawa Tohru	4. 巻 1, Issue 1
2. 論文標題 Hardy type inequalities with spherical derivatives	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 SN Partial Differ. Equ. Appl.	6. 最初と最後の頁 Article 5
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1007/s42985-019-0001-1">https://doi.org/10.1007/s42985-019-0001-1</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Cingolani Silvia, Tanaka Kazunaga	4. 巻 35
2. 論文標題 Semi-classical states for the nonlinear Choquard equations: existence, multiplicity and concentration at a potential well	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Rev. Mat. Iberoam.	6. 最初と最後の頁 1885 ~ 1924
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/rmi/1105	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ikoma Norihisa, Tanaka Kazunaga	4. 巻 24
2. 論文標題 A note on deformation argument for $L^2$ normalized solutions of nonlinear Schrödinger equations and systems	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Adv. Differential Equations	6. 最初と最後の頁 609 ~ 646
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計31件 (うち招待講演 30件 / うち国際学会 29件)

1. 発表者名 Tanaka Kazunaga
2. 発表標題 A new minimax approach to nonlinear scalar field equations with $L^2$ constraint
3. 学会等名 International Conference on Variational Methods (ICVAM-4) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tanaka Kazunaga
2. 発表標題 A new deformation theory under the (PSP) condition
3. 学会等名 第13回 非線形偏微分方程式と変分問題
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Bez Neal
2. 発表標題 Smoothing estimates for the kinetic transport equation at the critical regularity
3. 学会等名 保存則をもつ偏微分方程式の解の正則性、特異性および漸近挙動の研究 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Bez Neal
2. 発表標題 On the kinetic transport equation
3. 学会等名 調和解析と非線形偏微分方程式 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Bez Neal
2. 発表標題 Strichartz estimates for orthonormal systems of initial data
3. 学会等名 International Workshop on Fundamental Problems in Mathematical and Theoretical Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Bez Neal
2. 発表標題 Geometric estimates arising in the analysis of Zakharov systems
3. 学会等名 2018日本数学会秋季総合分科会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ozawa Tohru
2. 発表標題 Lifespan of periodic solutions to nonlinear Schrödinger equations
3. 学会等名 RIMS Workshop Nonlinear Wave and Dispersive Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年



1. 発表者名 Ozawa Tohru
2. 発表標題 Blowup solutions for the derivative nonlinear Schrödinger equation on torus
3. 学会等名 Recent topics on PDEs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ozawa Tohru
2. 発表標題 Lifespan of periodic solutions to derivative nonlinear Schrödinger equations
3. 学会等名 Nonlinear Dispersive Equations in Kumamoto, 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ozawa Tohru
2. 発表標題 On improved Hardy inequalities
3. 学会等名 Workshop on Harmonic analysis and Nonlinear Evolution Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tanaka Kazunaga
2. 発表標題 Singular perturbation problem for generalized Choquard equations
3. 学会等名 the Third Congress of the PRIMA, the Pacific Rim Mathematical Association (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tanaka Kazunaga
2. 発表標題 A new minimax approach to nonlinear scalar field equations with $L^2$ constraint
3. 学会等名 Seminari di Matematica (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ozawa Tohru
2. 発表標題 Uncertainty relations in the framework of equalities
3. 学会等名 International Conference for the 70th Anniversary of Korean Mathematical Society (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Bez Neal
2. 発表標題 Stability of the Brascamp-Lieb constant and applications
3. 学会等名 International Conference for the 70th Anniversary of the Korean Mathematical Society (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Tanaka Kazunaga
2. 発表標題 A new deformation argument for $L^2$ normalized solutions of nonlinear Schrödinger equations and systems
3. 学会等名 非線性微分方程式学木検討会 (Workshop on nonlinear differential equations) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計3件

1. 著者名 小澤徹	4. 発行年 2016年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 192
3. 書名 数理物理学としての微分方程式序論	

1. 著者名 M. D'Abbicco, M. R. Ebert, V. Georgiev, T. Ozawa (Eds.)	4. 発行年 2019年
2. 出版社 New Tools for Nonlinear PDEs and Application	5. 総ページ数 390
3. 書名 Trends in Mathematics, Birkhuser	

1. 著者名 K. Kato, T. Ogawa, and T. Ozawa (Eds.)	4. 発行年 2019年
2. 出版社 Mathematical Society of Japan	5. 総ページ数 419
3. 書名 Asymptotic analysis of nonlinear dispersive and wave equations	

〔産業財産権〕

〔その他〕

早稲田大学 理工学術院 先進理工学部 応用物理学科 小澤 徹研究室  
<http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html>

## 6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	田中 和永  (Tanaka Kazunaga)  (20188288)	早稲田大学・理工学術院・教授    (32689)	
研究 分担者	B E Z N E A L  (Bez Neal)  (30729843)	埼玉大学・理工学研究科・准教授    (12401)	
連携 研究者	町原 秀二  (Machihara Shuji)  (20346373)	埼玉大学・理学部・教授    (12401)	