

令和元年6月13日現在

機関番号：32682

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K13778

研究課題名(和文)非線形放物型偏微分方程式の解の複素特異点とパターン形成の関係

研究課題名(英文)Relation between pattern formations and complex singularities of solutions of nonlinear partial differential equations

研究代表者

二宮 広和(Ninomiya, Hirokazu)

明治大学・総合数理学部・専任教授

研究者番号：90251610

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：実軸上の反応拡散方程式を複素平面内の適当な領域に解析接続できることを示した。しかし、一般には、複素平面全体には拡張不可能であり、特異点が存在する。この特異点の運動を、熱方程式とアレン・カーン方程式を対象として調べた。まず、熱方程式の解を複素数の範囲で考え、その性質を調べた。アレン・カーン方程式を複素領域に拡張した場合、厳密解を用いて、複素特異点の移動を調べた。特異点を持つ性質について考察するために、一般化を試み、いくつかの結果を得た。さらに、無限遠からの分岐に関する研究も行い、RabinowitzやStuartの結果を拡張して論文をまとめた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非線形偏微分方程式は、天気予報などの身近な問題だけでなく、ナノテクノロジーから宇宙の解明まで幅広い分野で利用されている。しかし、非線形偏微分方程式の解を表現する解の公式はないため、解の形状を表現する手法の開発が求められている。本研究課題では、複素特異点や無限遠からのパターン形成について考察し、一部は論文として投稿するに至った。

研究成果の概要(英文)：We showed the analytic extension of the solution of a reaction-diffusion equation into complex domain. However, in general, the complex singularities appear. To study the motion of the singularities, we consider the heat equation and the Allen-Cahn-Nagumo equation. For the Allen-Cahn-Nagumo equation, we study the motion of the complex singularities of the exact solutions. We tried to extend the properties derived from this observation into the case for general nonlinearity.

Moreover, we study the bifurcation from infinity and we get the result which generalizes the results of Stuart and Rabinowitz into the multi-component reaction-diffusion systems.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：反応拡散系 複素特異点 パターン形成 自由境界問題

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

結晶成長、ヘレ・ショウ問題などさまざまな分野の自然現象において、複雑な形状が散見される。これらのモデル方程式は、反応拡散系や自由境界問題などの非線形放物型偏微分方程式となっている。これらの方程式から解の形状に関する情報を数学的に得るのは難しく、数値計算などの手法に依存することが多い。このため複雑な形状を表現する数学的手法の開発が待たれている。

研究代表者は、反応拡散系や自由境界問題のさまざまな非平面進行波解の構成や全域解の構成を行ってきており。例えば、V字進行波解、進行スポット解や指状進行解などを構成してきた。そして、このようなパターン解の存在証明において、精度のよい近似解を構成する手法を開発している。例えば、アレン・カーン方程式と呼ばれる放物型偏微分方程式は可積分系ではないが、パンルベ解析から双線形方程式を導くことができ、そこで得られた関数を用いて、解の非線形合成を行ってきた。非線形放物型偏微分方程式系などの散逸系においてもこうした手法が適用できることから“厳密解”の構成と“複素特異点”の情報を導き出すことが重要であるという着想に至った。なお、これらの準備として、反応拡散系の未知変数を複素変数に拡張する研究を行っている。非線形熱方程式の従属変数を複素数にすることで、実数に限っていたときには見られなかった現象が観察された。

2. 研究の目的

複雑な形状をもつ非線形偏微分方程式のパターン解は、数値計算によって得られているが、どのようにして、数学的に表現できるのであろうか？本研究課題では、非線形放物型偏微分方程式の解の形状を複素領域の特異点の実軸からの距離等の情報から特徴付けることを目的としている。空間変数を複素領域に拡張すると、放物型・楕円型偏微分方程式は適切でなくなる。そのため、本研究課題では非線形偏微分方程式を複素領域に拡張すること、および、その複素特異点の位置のダイナミクスとパターン形状の関係に関する研究を行う。まず、等角写像や特殊関数等を用いた厳密解を特異点の視点から考察し直し、特異点の位置情報を得る。それらの情報から複素領域上への拡張方法を確立し、複素特異点と解の形状・無限遠分岐・爆発問題との関係を調べる。

3. 研究の方法

まず、非線形放物型・楕円型偏微分方程式の知られている厳密解を用いて、その複素特異点の位置やダイナミクスを調べる。次に熱方程式の空間変数を複素領域に拡張し、初期値と複素特異点の関係を調べる。アレン・カーン・南雲方程式にパンルベ解析を行うことで得られる双線形方程式を数値計算によって調べ、特異点の動きを調べる。これらの考察より、非線形偏微分方程式を複素領域へ拡張する方法を確立して、複素特異点とパターン形成の関係を調べる。表面張力のないヘレ・ショウ問題においては厳密解を用いて樹枝状形状の解を構成し、その特異点と界面形状の関係を考察する。最後に複素特異点の実軸に近づくことと無限遠分岐・爆発問題との関係を調べる。

テーマ1. 反応拡散系の複素領域への拡張および複素特異点とパターン形成の関係(主な担当: 二宮, 桂田, 池田)

テーマ2. 自由境界問題のパターン形成と複素特異点の関係(主な担当: 二宮, 桂田, 小野寺)

テーマ3. 無限遠からの分岐や爆発問題と複素特異点の関係(主な担当: 二宮, 池田)

4. 研究成果

まず、テーマ1に関しては、実軸上の反応拡散方程式を、複素平面内の適当な領域に解析接続できることがこれまでの研究で分かった。ただし、一般に複素平面全体への拡張は、不可能である。初期関数が複素変面全体に拡張できない場合、特異点が存在し、その特異点の移動に関する研究が必要になる。そこで、2つの場合について考察した。具体的な特異点をもつ熱方程式の解の複素拡張を考察し、その解析接続の性質を調べた。この場合、有理型関数の初期値を考慮しても、少しでも時間が経てば領域内から特異点が除去されてしまうことがわかった。したがって、特異点が時間に対して連続的に存在するためには、非線形性が重要な役割を果たすことが示唆された。アレン・カーン・南雲方程式を複素領域に拡張した場合、厳密解を用いて、複素特異点の移動を調べた。特異点を持つ性質について考察するために、一般化を試み、いくつかの結果を得た。これらの結果は、現在論文にまとめているところである。

また、別の複素拡張として、一次元藤田型方程式の複素原始方程式、すなわち解の定義域および値域が複素領域である微分方程式でその両者を実軸へと制限したものが藤田型方程式となるものを構成した。しかし、その具体的な解を等角写像を用いて構成することには至らなかった。

さらに、無限遠からの分岐に関する研究も行った。Rabinowitz や Stuart によって知られている結果を反応拡散系に拡張するものである。この研究によって、無限遠から分岐する解を構成できるので、振幅が大きな解を捉えることができる。まず、Rabinowitz や Stuart の場合と同じく、sublinear な非線形項をもつ反応拡散系の無限遠分岐を示した。次に、無限遠の周りの線形化問題の固有方向から決定される方向にだけ sublinear な場合にも同様の結果を示すこ

とができることを示した。さらに、ほとんど sublinear でないが、退化する方向がある場合に
関する部分的な結果を得た。これらの結果を論文にまとめた。

さらに、2018 年度は、以下の明治非線型数理セミナーを開催した。

2018.11.12 (月) 15:30~17:50@中野キャンパス 6 階研究セミナー室 3

講演者 1: 森龍之介 (明治大学) 15:30~16:30

『Prey-predator 型反応拡散方程式のコンパクトな台をもつ初期値に対する解の長時間挙動に
ついて』

講演者 2: 中島主恵 (東京海洋大学) 16:50~17:50

『ある遺伝子頻度のモデルの解の一意性について』

2018.10.22 (月) 16:30~17:30@中野キャンパス 6 階研究セミナー室 1

講演者: Simon Eberle (University of Duisburg-Essen)

『Front blocking versus propagation in the presence of drift term varying in the direction
of propagation』

2018.8.7 (火) 17:00~18:30@中野キャンパス 6 階研究セミナー室 3

講演者: Frank Merle (University of Cergy-Pontoise / IHES)

『Inelasticity of soliton collisions for the 5D energy critical wave equation』

2018.7.26 (木) 17:00~19:00@生田キャンパス A 棟 A301 室

講演者 1: 牛越恵理佳 (横浜国立大学) 17:00~18:00

『Hadamard variational formula for the multiple eigenvalue of the Stokes equations with
friction slip boundary conditions』

講演者 2: 田中良巳 (横浜国立大学) 18:00~19:00

『ソフトマターの破壊現象 非線形科学の観点から 』

2018.5.8 (火) 17:10~19:10@生田キャンパス A 棟 A303

講演者 1: 川上翔矢 (埼玉大学) 17:10~17:40

『O'Hara エネルギーの離散化とその収束について』

講演者 2: 中村恒平 (埼玉大学) 17:55~18:25

『平面閉曲線に対する等周比を用いた補間不等式とその応用』

講演者 3: 伊藤涼 (東京大学) 18:40~19:10

『進行波の最小速度の Young 測度による解析』

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 15 件)

1. H. Ninomiya: Entire solutions and traveling wave solutions of the Allen-Cahn-Nagumo equation, *Discrete and continuous dynamical systems. Ser. A*, 39 (2019) 2001-2019, doi: 10.3934/dcds.2019084(査読あり)
2. R. Lui and H. Ninomiya: Traveling wave solutions for a bacteria system with density-suppressed motility, accepted in *Discrete and continuous dynamical systems. Ser. B*, 24-2 (2019, February) 931-940. doi: 10.3934/dcdsb.2018213 (査読あり)
3. H. Ninomiya, Y. Tanaka and H. Yamamoto: Reaction-diffusion approximation of nonlocal interactions using Jacobi polynomials, *Japan J. Indust. Appl. Math.* (2018) 35:613-651, <https://doi.org/10.1007/s13160-017-0299-z>(査読あり)
4. Y.-Y. Chen, J.-S. Guo, H. Ninomiya and C.-H. Yao: Entire solutions originating from monotone fronts to the Allen-Cahn equation, *Physica D*, 378-379, (2018) 1-19, DOI: 10.1016/j.physd.2018.04.003(査読あり)
5. H. Monobe and H. Ninomiya: Traveling wave solutions with convex domains for a free boundary problem, *Discrete and continuous dynamical systems. Ser. A, Volume 37, Issue 2*, (2017) pp 905--914, doi:10.3934/dcds.2017037(査読あり)
6. Y.-Y. Chen, J.-S. Guo and H. Ninomiya: Existence of rotating spots with spatially dependent feedback in the plane in a wave front interaction model, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 29, Issue 2, (2017) pp. 465--483, DOI 10.1007/s10884-016-9541-7(査読あり)
7. H. Ninomiya and C.-H. Wu: Traveling curved waves in two dimensional excitable media, *SIAM J. Mathematical Analysis*, Vol. 49, No. 2, (2017) pp. 777--817, DOI: 10.1137/16M1064040(査読あり)
8. H. Ninomiya, Y. Tanaka and H. Yamamoto: Reaction, diffusion and non-local

- interaction, *Journal of Mathematical Biology*, 75, Issue 5, (2017) pp. 1203--1233
doi:10.1007/s00285-017-1113-x(査読あり)
9. M. Iida, H. Monobe, H. Murakawa and H. Ninomiya: Vanishing, moving and immovable interfaces in fast reaction limits, *Journal of Differential Equations*, 263.5 (2017), pp. 2715-2735. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.04.009>(査読あり)
 10. Y. Tanaka, H. Yamamoto, and H. Ninomiya: Mathematical approach to nonlocal interactions using a reaction-diffusion system. *Development, Growth & Differentiation* (2017), 8 pages, DOI: 10.1111/dgd.12354(査読あり)
 11. Akiyasu Tomoeda, Tomoyuki Miyaji, Kota Ikeda: Bifurcation structure of a car-following model with nonlinear dependence on the relative velocity, *Transportmetrica A: Transport Science*, 14 (2018), 503-519, DOI: 10.1080/23249935.2017.1351007(査読あり)
 12. Hirohisa Tamagawa, Kota Ikeda: Another interpretation of the Goldman-Hodgkin-Katz equation based on Ling's adsorption theory, *European Biophysics Journal*, 47(2018), 869-879, DOI: 10.1007/s00249-018-1332-0(査読あり)
 13. Hirohisa Tamagawa, Kota Ikeda: Generation of membrane potential beyond the conceptual range of Donnan theory and Goldman-Hodgkin-Katz equation, *Journal of Biological Physics*, 43 (2018), 319-340, DOI: 10.1007/s10867-017-9454-7(査読あり)
 14. R. Ikehata, and M. Onodera, Remarks on the large time behavior of the L^2 -norm of solutions to strongly damped wave equations, *Differential Integral Equations* 30, no. 7-8, 2017, 505-520, (査読あり)
 15. M. Onodera, Dynamical approach to an overdetermined problem in potential theory, *J. Math. Pures Appl.* (9) 106, no. 4, 2016, 768-796, DOI : 10.1016/j.matpur.2016.03.011(査読あり)

[学会発表](計 40 件)

1. H. Ninomiya, Propagation phenomena in reaction-diffusion equations, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, July 7 (July 5-9), 2018, NTU, Taipei
2. H. Ninomiya, Dynamics of interface-reaction systems, UK-Japan Workshop on Analysis of Nonlinear Differential Equations, Swansea University, May 16-18, 2018
3. H. Ninomiya, Dynamics of interface-reaction equations, International Conference on Nonlinear Analysis and its Applications, Tamkang University, March, 23-24, 2018
4. H. Ninomiya, Dynamics of solutions of interface-reaction systems, The 3rd International Conference on Dynamics of Differential Equations, Hiroshima University, March 14-18, 2018.
5. H. Ninomiya, Dynamics of waves in excitable media, The 3rd conference on Differential Geometry and Differential equations, Renmin University of China, Beijing, Oct. 20-22, 2017
6. H. Ninomiya, Dynamics of waves in excitable media, S10 New mathematical approaches for understanding of biological phenomena, 日本数理生物学会, Oct. 7, 2017, Hokkaido University, Japan
7. H. Ninomiya: Reaction-diffusion approximations of non-local evolutionary equation and wave equation, International Conference on Elliptic and Parabolic Problems, 22.05.2017-26.05.2017, (May 23) Gaeta, Italy
8. H. Ninomiya: Traveling waves of curvature flows with anisotropic external forces, *Mathematical Analysis on Nonlinear PDEs*, Sendai, 13:40 - 14:25, Jan. 8, 2017 (January 6 - 8, 2017)
9. H. Ninomiya: Traveling waves of free boundary problems, NCTS Workshop on Nonlinear Differential Equations: Theory and Application, Nov. 18, 2016
10. H. Ninomiya: Obstacle-induced spiral in two-dimensional excitable media, ミクロな振る舞いと集団的パターン形成に係る階層的構造の解明, 14:50-15:40, Sept. 13, (Sept. 12-14), 2016, RIMS, Kyoto, Japan
11. H. Ninomiya: Pattern formation through non-local interactions, The 2016 (26th) annual meeting of the Japanese Society for Mathematical Biology, JSMB2016, Kyushu University, 10:45-11:05, September 8, 2016 (September 7-9, Fukuoka, Japan)
12. H. Ninomiya: Layered Interface Systems and its Dynamics, 11th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Orlando USA, July 1-5, 2016
13. H. Ninomiya: Traveling waves of interface equations, Center for Partial Differential Equations, Shanghai, China, May 31, 2016
14. H. Ninomiya: Traveling waves of interface equations, NTHU MATH Visiting Scholar Colloquium, May 9, 2016

15. H. Ninomiya: What are reaction-diffusion systems ?, National Taiwan University, May 5, 2016
16. Kota Ikeda, Shin-Ichiro Ei, Masaharu Nagayama, Akiyasu Tomoeda: Reduction approach to a reaction-diffusion system for collective motions of camphor boats, Seminar on Sorbonne Universite, 2018/11/22, Sorbonne Universite, France
17. 池田幸太, 宮路 智行, 北畑 裕之, 小谷野 由紀, 義永 那津人: 単一自己駆動粒子が呈する準周期的な運動の数理解析, 日本応用数理学会 2018 年度年会, 2018/09/05, 名古屋大学, 名古屋市, 愛知県
18. Kota Ikeda, Shin-Ichiro Ei, Masaharu Nagayama, Akiyasu Tomoeda: Reduction approach to a reaction-diffusion system for collective motions of camphor boats, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2018/07/08, National Taiwan University, Taipei, Taiwan
19. Kota Ikeda, Hiroyuki Kitahata, Yuki Koyano, Tomoyuki Miyaji, Natsuhiko Yoshinaga: Quasi-Periodic Solution in a Dynamical System for the Motion of a Single Particle, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2018/07/07, National Taiwan University, Taipei, Taiwan
20. Kota Ikeda, Hiroyuki Kitahata, Yuki Koyano, Tomoyuki Miyaji, Natsuhiko Yoshinaga: Quasi-periodic solution in a dynamical system for the motion of a single particle, International Conference on the Dynamics of Differential Equations, 2018/03/16, 広島大学, 広島県
21. Kota Ikeda, Shin-Ichiro Ei, Masaharu Nagayama, Akiyasu Tomoeda: Reduction approach to a reaction-diffusion system for collective motions of camphor boats, MINIWORKSHOP ON NONLINEAR ANALYSIS, 2017/11/02, Universite de Paris-Sud, Bat. 425 (Salle du 3eme etage) Orsay, France
22. Kota Ikeda, Shin-Ichiro Ei, Masaharu Nagayama, Akiyasu Tomoeda: Reduction approach to a reaction-diffusion system for collective motions of camphor boats, Mathematics of Pattern Formation, 2016/09/14, Mathematical Research and Conference Center, Poland
23. Kota Ikeda, Takeshi Miki: Regime shift in a phytoplankton phosphorus model with vertical structure and seasonality, Czech-Japanese-Polish Seminar in Applied Mathematics 2016, 2016/09/06, AGH University of Science and Technology, Poland
24. Kota Ikeda, Shin-Ichiro Ei, Masaharu Nagayama, Akiyasu Tomoeda: Reduction approach to a reaction-diffusion system for collective motions of camphor boats, Patterns and Waves 2016, 2016/08/02, Hokkaido Univ., Sapporo, Hokkaido
25. Kota Ikeda, Shin-Ichiro Ei, Masaharu Nagayama, Akiyasu Tomoeda: Reduction Approach to a Reaction-diffusion System for Collective Motions of Camphor Boats, 11th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2016/07/03, Hyatt Regency Orlando, Orlando, FL, USA
26. Michiaki Onodera: Foliations in Bernoulli's free boundary problem, AIMR Workshop on Pure and Applied Mathematics, 2019年1月7日, 東北大学
27. Michiaki Onodera: Dynamical approach to an overdetermined problem in potential theory, INS Colloquia, 2018年11月27日, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China
28. Michiaki Onodera, Foliations in Bernoulli's free boundary problem, 第61回函数論シンポジウム, 2018年11月24日, 広島大学
29. Michiaki Onodera: Dynamical approach to an overdetermined problem, Tokyo Tech - Uppsala University 5th Joint Symposium, 2018年9月24日, Uppsala University, Sweden
30. Michiaki Onodera: Dynamical approach to Bernoulli's free boundary problem, Ito Workshop on Partial Differential Equations - KYUSHU UNIV.- POSTECH-SJTU Joint Workshop on PDEs and Related Topics, 2018年8月24日, 九州大学
31. Michiaki Onodera: Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem, The 43rd Sapporo Symposium on Partial differential Equations, 2018年8月22日, 北海道大学
32. Michiaki Onodera: Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem, Geometric PDEs in Freiburg 2018, 2018年7月26日, University of Freiburg, Freiburg, Germany
33. Michiaki Onodera: Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem, Workshop on Nonlinear Parabolic PDEs, 2018年6月14日, Institut Mittag-Leffler, Djursholm, Sweden
34. Michiaki Onodera: Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem, Seminaire d'Equations aux Derivees Partielles et Applications, 2017年12月5日, Institut Elie Cartan, Nancy, France
35. Michiaki Onodera: Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem, Uppsala

- University - Tokyo Tech Joint Symposium, 2017年11月14日, 東京工業大学
36. Michiaki Onodera: Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem, The third Japanese-Spanish workshop on Differential Geometry, 2017年9月22日, ICMAT, Madrid, Spain
 37. Michiaki Onodera: Dynamical approach to an overdetermined problem, Geometry Seminar, 2017年9月14日, ICMAT, Madrid, Spain
 38. Michiaki Onodera: Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem, Ito Workshop on Partial Differential Equations, 2017年8月24日, 九州大学
 39. Michiaki Onodera: Dynamical approach to an overdetermined problem, Korea-Japan International Workshop of Nonlinear Partial Differential Equations --- Aspect of Regularity and Asymptotics ---, 2016年11月18日, 洞爺サンパレス
 40. Michiaki Onodera: On the solution structure of Bernoulli's free boundary problem, The 9th Nagoya Workshop on Differential Equations, 2017年3月22日, 名古屋大学

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：桂田 祐史

ローマ字氏名：KATSURADA, masashi

所属研究機関名：明治大学

部局名：総合数理学部

職名：准教授

研究者番号（8桁）：80224484

研究分担者氏名：池田 幸太

ローマ字氏名：IKEDA, kota

所属研究機関名：明治大学

部局名：総合数理学部

職名：准教授

研究者番号（8桁）：50553369

研究分担者氏名：小野寺 有紹

ローマ字氏名：ONODERA, michiaki

所属研究機関名：東京工業大学

部局名：理学院

職名：准教授

研究者番号（8桁）：70614999

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。