

平成 30 年 6 月 26 日現在

機関番号：33503

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2017

課題番号：16K16061

研究課題名(和文)極値的擬等角写像の可視化

研究課題名(英文)Visualizaion of exteremal quasiconformal mappings

研究代表者

島内 宏和 (Shimauchi, Hirokazu)

山梨英和大学・人間文化学部・助教

研究者番号：90759200

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,100,000円

研究成果の概要(和文)：極値的擬等角写像の可視化の研究に取り組んだ。ベルトラミ係数と境界対応の情報から線形系を構築し、その最小二乗解として得られる区分線形写像で近似解を構成するアルゴリズムを構築した。複数の数値実験で高い精度が得られている。また、Loewner流の擬等角写像への応用可能性に着目し、その数値計算手法について研究した。提示したアルゴリズムが生成する近似多項式の係数の収束性を示し、学術研究誌および国際会議で発表した。

研究成果の概要(英文)：In this project, the visualization method of extremal quasiconformal mappings was studied. We constructed an approximant as a piecewise linear mapping, which is obtained by the least squares solution of an overdetermined linear system. The Beltrami coefficients and boundary correspondence was used for our linear system. Numerical experiments show high accuracy of approximants. Furthermore, we studied the numerical construction of the Loewner flow in view of application for quasiconformal mappings. The approximant was constructed as a family of polynomials. We proved the convergence of the coefficients of polynomial. The results were published in a mathematical journal and presented on international conferences.

研究分野：情報学

キーワード：極値的擬等角写像 数値擬等角写像 擬等角写像 可視化 高性能計算

## 1. 研究開始当初の背景

医用画像処理などの分野で、等角写像の数値計算の応用が広がっている。等角写像は角度を保つような変換である。角度を保つ変換は局所的な幾何を保つため、曲面を平面に等角写像で写し、見たい点の周囲を拡大することで、その様子を探ることができる。しかしながら、等角写像は境界の3点の対応が決まると、他の点の対応は全て自動的に決まってしまう。

擬等角写像は角度の変化をある程度許すような変換であり、可微分同相写像を含む写像のクラスである。平面間の擬等角写像を考える場合、各点における等角写像からの逸脱はベルトラミ係数で評価できる。極值的擬等角写像は、同相な領域間の与えられた境界対応を持つ擬等角写像の中で、各点での角度の歪曲が最も小さいものであり、与えられた境界対応を持ちつつ等角写像に近い写像と言える。擬等角写像は複素解析学の周辺分野において深く研究され、タイヒミュラー空間論や複素力学系といった分野においてその解析の道具として用いられてきた。他方、擬等角写像の実社会の問題への応用は、比較的最近になってから見出されたものがほとんどである。

極值的擬等角写像は、人間の臓器などのような複雑な曲面の画像処理等、様々な方面に応用が見出され、それに伴い極值的擬等角写像の数値計算法もいくつか提示されてきた。しかしながら、その数値計算法の決定打と呼べるものは存在していない状況であった。

## 2. 研究の目的

極值的擬等角写像の高速かつ収束性が保証された数値計算法を構築することを目指す。特に、本研究では与えられた複素平面内の多重連結領域から、それと同じトポロジーを持つ標準領域と与えられた境界値に対応する極值的擬等角写像を構成することを目的とする。

極值的擬等角写像の応用範囲は広いにもかかわらず、その数値計算法はこれまであまり研究されてきていなかった。また、擬等角写像の研究は長い歴史を持ち、その解析学的・幾何学的性質はよく調べられているにもかかわらず、それらが有効に活用されているとは言い難い状況であった。

本研究では、Porter 氏の単位円板の自己擬等角写像の共同研究の際に見出した線形系を用いた区分線形近似の手法を応用しつつ、擬等角写像に固有の性質を最大限に活用し、既存の手法の欠点を補う新しい極值的擬等角写像の数値計算法の確立を目指す。

## 3. 研究の方法

### (1). Porter 氏と共同で構築した単位円板の

自己擬等角写像の構成法を応用し、極值的擬等角写像を区分線形写像により近似する方法を検討した。以下のような手順で研究を進めた。

- I. 線形系の構築の検討および極值的擬等角写像に関する文献調査および学会への参加などによる情報収集
- II. 極值的擬等角写像可視化プログラムの実装
- III. 数値実験による実験的な精度検証および改善の検討
- IV. 近似解の収束性の理論的調査

線形系構築、近似解の実装および数値実験については、実験結果を確認しながらその挙動を観察し、修正を繰り返しながら検討を進めた。

検証には、予め極值的擬等角写像を具体的に構成できるケースを用いて、近似解の各頂点における誤差やベルトラミ係数の誤差を比較し、その精度を確認した。なお、実装は導入したソフトウェア Wolfram Mathematica 11 (以下、Mathematica) を用いて行った。

精度の高い近似解を生成する線形系が構築できた後に、解の収束性について検証に取り組んだ。

- (2). Loewner 方程式の擬等角写像への応用可能性に着目し、堀田一敬氏とともに Radial Loewner 流の可視化の研究に取り組んだ。Radial Loewner 方程式の解は単位円板から拡張する領域族への等角写像族となることに着目し、各時間における等角写像を近似する多項式族の構成方法について検討する。以下のような手順で研究を進めた。

- I. Radial Loewner 流に関する関連文献調査および学会への参加などによる情報収集
- II. Radial Loewner 流の近似多項式族の係数の計算法の検討
- III. Radial Loewner 流の可視化プログラムの実装
- IV. 数値実験による実験的な精度検証および改善の検討
- V. 近似多項式の係数の収束性の理論的調査
- VI. 近似多項式の係数の誤差評価

近似多項式の計算法の検討、可視化プログラムの実装・数値実験は、結果を確認しつつ改善を加えながら研究を進めた。Radial Loewner 流を具体的に記述することができる複数のケースを用いて、Mathematica による数値実験を行い、解について検証した。

実験的に良好な結果が得られるアルゴリズムを構築できた後に、近似多項式の係数の収束性の検証、誤差評価および計算に必要な数値積分に関するパラメーターの評価にも取り組んだ。

#### 4. 研究成果

本研究にて得られた成果は以下の通りである。

- (1). 極値的擬等角写像を区分線形写像で近似するために、定義域のメッシュと区分線形写像のベルトラミ係数および境界対応を用いて線形系を構成した。構築した線形系は優決定系となっていたため、最小自乗解をその近似解として採用した。定義域のメッシュと構築した線形系の最小二乗解から誘導される区分線形写像を極値的擬等角写像の近似とした。数値実験を繰り返しながら修正を加え、最終的に高い精度が得られる線形系を構築することができた。構築された線形の係数行列の要素のほとんどは0であり、疎行列に適した数値解法を用いることができる。また、当初想定して居た構築した線形系に比べ、一部の方程式に重みを加えることで精度の向上が見込まれることがわかった。実験的には良い結果が得られているものの、解の収束性の検証には至っておらず、今後の課題となる。
- (2). Radial Loewner 流は時間によりパラメトライズされた等角写像族を生成するが、各時間における等角写像は冪級数にて表すことが可能である。そこで、各時間における冪級数表示と Loewner 方程式より得られる係数に関する公式を離散化し、その近似値を計算するための再帰公式を構築した。構築した再帰公式について、特に解が具体的に構成できる例を用いて、数値実験を行った。再帰公式は複数のパラメーターを含むが、パラメーターをうまく選ぶことで、真の係数の値に近づけられることが観察された。そこで、再帰公式により計算される値の真の係数の値への収束性について証明により組み、最終的にその証明にいたった。さらに、パラメーターを選んだときの係数の誤差に関する評価を与えた。また、計算機上で計算する際、該当の再帰公式を高速に計算するための検討も行った。本研究に関する成果は、学術研究誌 *Mathematical Methods in the Applied Sciences* に掲載された。また、チェコ工科大学において開催された国際会議 (25th ISQS)、香港大学において開催された国際会議 (25th ICFIDCAA)、マリー・

キュリー・スクウォドフスカ大学において開催された国際会議 (8th CMFT)、首都大学東京で開催された日本数学会 2017 年度年会および千葉大学で開催された等角写像・値分布論合同研究集会において発表した。

また、2016 年 9 月には第 51 回函数論サマーセミナーを山梨県において開催した。国内の複素解析学周辺分野の専門家・大学院生が集まって研究成果を発表し、交流する機会を持った。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

1. Ikkei Hotta and Hirokazu Shimauchi, On a numerical algorithm for the solution of the radial Loewner equation, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41 (2), 714-723 (2018).

[学会発表] (計 5 件)

1. Hirokazu Shimauchi, Visualizing the solution of the radial Loewner equation, the International Conference on Computational Methods and Function Theory 2017, Maria Curie-Skłodowska University (Lublin, Poland), 2017 年 7 月 19 日.
2. Hirokazu Shimauchi, A numerical algorithm for solving the Loewner equation, The 25th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, The University of Hong Kong (Hong Kong), 2017 年 6 月 27 日.
3. Hirokazu Shimauchi, Numerical solution of the radial Loewner equation, The XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries, Czech Technical University (Prague, Czech Republic), 2017 年 6 月 9 日.
4. 島内宏和, Numerical solution of the radial Loewner equation, 日本数学会 2017 年度年会, 首都大学東京, 2017 年 3 月 24 日.
5. 島内宏和, Numerical computation of the radial Loewner flow, 等角写像・値分布論合同研究集会, 千葉大学, 2017 年 1 月 22 日.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

[その他]

研究代表者ホームページ  
<https://sites.google.com/yamanashi-eiwa.ac.jp/hshimauchi/home>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

島内 宏和 (SHIMAUCHI, Hirokazu)  
山梨英和大学人間文化学部人間文化学  
科・助教  
研究者番号：90759200

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 研究協力者

なし